ความสัมพันธ์

March 12, 2020

ในเอกสารฉบับนี้เราจะพิจารณา *ความสัมพันธ์* ระหว่างสมาชิกในเซต ในวิชาตรรกศาสตร์เรานิยมถือความสัมพันธ์ว่าเป็นประพจน์ พิจารณาการกำหนดสัญลักษณ์ต่อไปนี้

- t: โต๊ะ
- b: หนังสือ
- Pxy : x อยู่บน y

สมมุติให้หนังสืออยู่บนโต๊ะ เราอาจถือได้ว่าหนังสือและโต๊ะมีความสัมพันธ์กัน เขียนแทนด้วย Pbt

ในทางคณิตศาสตร์มีความสัมพันธ์ระหว่างวัตถุสองชนิดจำนวนมากที่เราสนใจศึกษา (การเท่ากัน, ฟังก์ชัน, ฯลฯ) ดังนั้นเราจึงขยายความหมายของความสัมพันธ์ในกว้างขวางมากยิ่งขึ้น

1 ความสัมพันธ์

บทนิยาม 1.1. สำหรับ a, b ที่เป็นสมาชิกของเซต A, B ใด ๆ จะสามารถสร้าง*คู่อันดับ* (a, b) โดยมีเงื่อนไขว่า $(a, b) = (a', b')$ ก็ต่อเมื่อ $a = a'$ และ $b = b'$

คู่อันดับ (a, b) นั้นคล้ายกับเซต $\{a, b\}$ แต่ต่างกันตรงที่ว่าลำดับของวัตถุสำคัญในคู่อันดับ โดยทั่วไปแล้ว $(a, b) \neq (b, a)$ สำหรับคู่อันดับ

บทนิยาม 1.2. ให้ A, B เป็นเซต เซตของคู่อันดับ (a, b) ทั้งหมด เรียกว่าผลคูณคาร์ทีเซียนของ A และ B เขียนในรูปแบบเซตได้ว่า

$$A \times B = \{(a, b) \colon a \in A \wedge b \in B\}$$

เมื่อมีเครื่องมือพร้อมแล้ว เราสามารถนิยามความสัมพันธ์โดยใช้คู่อันดับได้

บทนิยาม 1.3. จะเรียก R ว่าเป็นความสัมพันธ์ระหว่างเซต A และ B ก็เมื่อ $R \subseteq A \times B$

ตัวอย่าง 1. พิจารณา $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{a, b\}$ เซตต่อไปนี้เป็นความสัมพันธ์ระหว่าง A และ B ทั้งหมด

- $R_1 = \{(1, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$
- $R_2 = \{(1, a), (2, a), (3, a)\}$

- $R_3 = \{(1,b),(3,a)\}$
- $R_4 = \emptyset$

บทนิยาม 1.4. จะเรียก R ว่าเป็นความสัมพันธ์บนเซต A ก็เมื่อ $R \subseteq A \times A$ (นิยมเขียน $A \times A$ ให้เป็น A^2)

ความสัมพันธ์ส่วนใหญ่มักจะพิจารณาสมาชิกสองตัวจากเซตเดียวกัน

ตัวอย่าง 2. ให้ $R \subseteq \mathbb{N}^2$ เป็นความสัมพันธ์บนเซต $\mathbb{N}$ โดยที่ $(a,b) \in R$ ก็ต่อเมื่อ $a < b$

ตัวอย่าง 3. ให้ $R \subseteq \mathbb{R}^2$ เป็นความสัมพันธ์บนเซต $\mathbb{R}$ โดยที่ $(a,b) \in R$ ก็ต่อเมื่อ $\frac{a}{b}$ เป็นจำนวนเต็ม

ตัวอย่าง 4. สำหรับเซต A ใด ๆ **ความสัมพันธ์เอกลักษณ์**บน A คือเซต

$$1_A = \Delta_A = \{(a,a) \colon a \in A\}$$

เป็นเซตของคู่อันดับทั้งหมดที่มีสมาชิกตัวหน้าและตัวหลังเป็นตัวเดียวกัน

ความสัมพันธ์ระหว่างเซต A, B ไม่จำเป็นต้องจับคู่สมาชิกทุกตัว ดังนั้นเราจึงกำหนดสัญลักษณ์สำหรับเซตของสมาชิกที่ถูกจับคู่

บทนิยาม 1.5. ให้ $R \subseteq A \times B$ *โดเมน* ของความสัมพันธ์ R คือเซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับทั้งหมดใน R

$$\mathrm{dom}(R) = D_R = \{a \colon a \in A \wedge \exists b(b \in B \wedge (a,b) \in R)\}$$

เรนจ์ ของความสัมพันธ์ R คือเซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับทั้งหมดใน R

$$\mathrm{ran}(R) = R_R = \{b \colon b \in B \wedge \exists a(a \in A \wedge (a,b) \in R)\}$$

ตัวอย่าง 5. ให้ $R_2 = \{(1,a),(2,a),(3,a)\}$ ดังนั้น $D_{R_2} = \{1,2,3\}$ และ $R_{R_2} = \{a\}$

ถ้าเรามีความสัมพันธ์ S และ R เราสามารถสร้างความสัมพันธ์ใหม่ขึ้นมาได้ สมมติให้ $(a,b) \in S$ และ $(b,c) \in R$ ดังนั้น a มีความสัมพันธ์กับ c ผ่าน b ดังนั้นความสัมพันธ์ใหม่จะต้องมี (a,c) เป็นสมาชิก

บทนิยาม 1.6. ให้ $R \subseteq A \times B$ และ $S \subseteq B \times C$ คอมโพสิชั่นของ R และ S คือสับเซตของ $A \times C$ นิยามดังต่อไปนี้

$$S \circ R = \{(x,z) \colon (\exists y \in B)((x,y) \in R \text{ และ } (y,z) \in S)\}$$

ในตัวอย่างด้านบน $(a,c) \in R \circ S$ เนื่องจาก $(a,b) \in S$ และ $(b,c) \in R$

บทนิยาม 1.7. ให้ $R = \{(1,2),(2,4),(3,6)\}$ และ $S = \{(2,5),(2,6),(6,1),(1,0)\}$ แล้วจะได้ว่า $S \circ R = \{(1,5),(1,6),(3,1)\}$ และ $R \circ S = \{(6,2)\}$

บทนิยาม 1.8. ความสัมพันธ์อินเวอร์สของความสัมพันธ์ R คือเซต

$$R^{-1} = \{(y,x) \colon (x,y) \in R\}$$

คือความสัมพันธ์ที่กลับตำแหน่งในคู่อันดับของ R

บทนิยาม 1.9. ให้ $R = \{(1,2),(2,4),(3,6)\}$ และ $S = \{(2,5),(2,6),(6,1),(1,0)\}$ แล้วจะได้ว่า $S^{-1} = \{(5,2),(6,2),(6,1),(0,1)\}$ และ $R^{-1} = \{(2,1),(4,2),(6,3)\}$

ทฤษฎีบท 1.1. $\mathrm{dom}(R) = \mathrm{ran}(R^{-1})$ และ $\mathrm{ran}(R) = \mathrm{dom}(R^{-1})$

พิสูจน์. ให้ $x \in \mathrm{dom}(R)$ ดังนั้นจะมี $y \in \mathrm{ran}(R)$ ที่ทำให้ $(x, y) \in R$
จะได้ว่า $(y, x) \in R^{-1}$ ดังนั้น $x \in \mathrm{ran}(R^{-1})$ □

ทฤษฎีบท 1.2. สำหรับความสัมพันธ์ R ใด ๆ $\Delta_{\mathrm{ran}(R)} \subseteq R \circ R^{-1}$

พิสูจน์. ให้ $(y, y) \in \Delta_{\mathrm{ran}(R)}$ เป็นสมาชิกใด ๆ จากนิยามจะได้ว่า $y \in \mathrm{ran}(R)$
ดังนั้นจะมี $x \in \mathrm{dom}(R)$ ที่ทำให้ $(x, y) \in R$ ซึ่งก็คือ $(y, x) \in R^{-1}$
จากนิยามของ $R \circ R^{-1}$ จะได้ว่า $(y, y) \in R \circ R^{-1}$ ด้วย
สรุปได้ว่า $\Delta_{\mathrm{ran}(R)} \subseteq R \circ R^{-1}$ □

แบบฝึกหัด

1. ให้ L เป็นความสัมพันธ์น้อยกว่าบนจำนวนเต็ม กล่าวคือ $(a, b) \in L$ ก็ต่อเมื่อ a น้อยกว่า b และ

$$L' = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \colon a - b \in \mathbb{Z}^-\}$$

   จงแสดงว่า $L = L'$

2. จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้
   (a) $\{(0, 1), (0, 2), (2, 4), (6, 7)\}$
   (b) $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$
   (c) $\emptyset \times \mathbb{N}$
   (d) $\{(x, y) \colon x, y \in [0, 1]$ และ $x < y\}$
   (e) $\{((a, b), a + b) \colon a, b \in \mathbb{Z}\}$

3. จงหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ต่อไปนี้
   (a) $\emptyset$
   (b) $\Delta_{\mathbb{Z}}$
   (c) $\{(0, 1), (1, 2), (3, 6)\}$
   (d) $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$

4. ให้ $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$ จงพิสูจน์ว่า
   (a) $R^{-1} \circ S^{-1} \subseteq C \times A$
   (b) $\mathrm{dom}(R) = \mathrm{ran}(R^{-1})$
   (c) $\mathrm{ran}(R) = \mathrm{dom}(R^{-1})$
   (d) $R^{-1} \circ S^{-1} = (S \circ R)^{-1}$

5. ให้ $R \subseteq A \times B$ จงแสดงว่า $(R^{-1})^{-1} = R$

6. สำหรับความสัมพันธ์ R ใด ๆ $\Delta_{\mathrm{dom}(A)} \subseteq R^{-1} \circ R$

7. ให้ $R \subseteq A \times B$ จงแสดงว่า $R \circ I_A = R$ และ $I_B \circ R = R$ และพิสูจน์เพิ่มไปอีกว่า ถ้า A, B ต่างก็เป็นสับเซตของ C แล้ว $R \circ I_C = I_C \circ R = R$

8. ให้ $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$ จงแสดงว่า $S \circ R = \emptyset$ ก็ต่อเมื่อ $\mathrm{dom}(S)$ และ $\mathrm{ran}(R)$ ไม่มีส่วนร่วมกัน $(\mathrm{dom}(S) \cap \mathrm{ran}(R) = \emptyset)$

9. อันที่จริงเราสามารถมองคู่อันดับเป็นเซตได้ (โดย Kuratowski)

   บทนิยาม 1.10. คู่อันดับ (a, b) คือเซต

   $$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

   จงพิสูจน์ว่าบทนิยามนี้สมมูลกับบทนิยาม 1.1

2 ความสัมพันธ์สมมูล

ในบทนี้เราใช้สัญลักษณ์ aRb แทน $(a, b) \in R$

บทนิยาม 2.1. ให้ R เป็นความสัมพันธ์บนเซต S จะเรียก R ว่าเป็นความสัมพันธ์สมมูล ก็เมื่อ

- (สมบัติสะท้อน) aRa ทุก $a \in S$
- (สมบัติสมมาตร) ถ้า aRb แล้ว bRa สำหรับทุก ๆ $a, b \in S$
- (สมบัติถ่ายทอด) ถ้า aRb และ bRc แล้ว aRc

ตัวอย่าง 6. ให้ $S = \{1, 2, 3, 4\}$ แล้ว $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 1)\}$ เป็นความสัมพันธ์สมมูล

ตัวอย่าง 7. ให้ $m \in \mathbb{N}$ R เป็นความสัมพันธ์บน $\mathbb{Z}$ โดยที่ aRb ก็ต่อเมื่อ $m|(a - b)$

R เป็นความสัมพันธ์สมมูล

- (สมบัติสะท้อน) เพราะว่า $a - a = 0 = 0m$ ดังนั้น aRa สำหรับทุก $a \in \mathbb{Z}$
- (สมบัติสมมาตร) ให้ aRb ดังนั้น $a - b = mk$ สำหรับบางจำนวนเต็ม k จะได้ว่า $b - a = m(-k)$ ดังนั้น bRa
- (สมบัติถ่ายทอด) ให้ aRb และ bRc ดังนั้น $a - b = mk$ และ $b - c = ml$ สำหรับบางจำนวนเต็ม k, l จะได้ว่า $a - c = a - b + b - c = mk + ml = m(k + l)$ ดังนั้น aRc

ตัวอย่าง 8. ให้ R เป็นความสัมพันธ์บน $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ โดยที่ $(a, b)R(c, d)$ ก็ต่อเมื่อ $ad = bc$

R เป็นความสัมพันธ์สมมูล

ตัวอย่าง 9. ให้ R เป็นความสัมพันธ์บนเซตของจำนวนจริง โดยที่ aRb ก็ต่อเมื่อ $a - b \in \mathbb{Z}$

R เป็นความสัมพันธ์สมมูล

เราสามารถจัดกลุ่มของสมาชิกในเซตเข้าด้วยกันไปตามความสัมพันธ์ R โดยที่สมาชิกแต่ละตัวสัมพันธ์กันผ่าน R

บทนิยาม 2.2. ให้ R เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน A และ $a \in A$ เป็นสมาชิกใด ๆ เซตของสมาชิกทุกตัวใน A ที่มีความสัมพันธ์กับ a ผ่าน R จะเรียกเซตนี้ว่าชั้นสมมูล (Equivalence class) ของ a แทนด้วยสัญลักษณ์ $[a]_R$

กล่าวโดยสรุป

$$[a]_R = \{x \colon xRa\}$$

เมื่อ R เป็นที่เข้าใจกันแล้ว เราจะละการเขียนเหลือเพียง $[a]$

ทฤษฎีบท 2.1. ให้ R เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน A ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. aRb

2. $[a]_R = [b]_R$

3. $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

พิสูจน์. จะแสดง (1) → (2) ให้เป็นตัวอย่าง ที่เหลือเป็นแบบฝึกหัด

ให้ aRb จะแสดงว่าเซต $[a]_R = [b]_R$ ด้วยการแสดงความสมมูล

$$\begin{aligned} c \in [a]_R &\iff cRa \text{ (นิยาม)} \\ &\iff cRb \text{ (จาก } cRa, aRb \text{ และ } R \text{ มีสมบัติถ่ายทอด)} \\ &\iff c \in [b]_R \text{ (นิยาม)} \end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 10. สมมติให้ $m = 5$ สำหรับความสัมพันธ์ในข้อ 7 ชั้นสมมูลทั้งหมดได้แก่

$$\begin{aligned} [1] &= \{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, \ldots\} \\ [2] &= \{\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, \ldots\} \\ [3] &= \{\ldots, -7, -2, 3, 8, 13, \ldots\} \\ [4] &= \{\ldots, -6, -1, 4, 9, 14, \ldots\} \\ [5] &= \{\ldots, -5, 0, 5, 10, 15, \ldots\} \end{aligned}$$

ผลที่น่าสนใจที่สุดในบทนี้ คือความสัมพันธ์สมมูลจะแบ่งกั้นเซตออกเป็นส่วน ๆ ซึ่งแยกออกจากกันโดยสิ้นเชิง

บทนิยาม 2.3. ให้ S เป็นเซต ผลแบ่งกั้น P ของเซต S คือเซตของเซตย่อยของ S ซึ่งมีสมบัติว่า

1. $\emptyset \notin P$

2. ยูเนียนของสมาชิกใน P เท่ากับ S (นั่นคือ $\bigcup_{A \in P} A = S$)

3. เซตสองตัวที่แตกต่างกันใด ๆ ใน P ไม่มีส่วนร่วมกัน นั่นคือ $(\forall A, B \in P)(A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset)$

ทฤษฎีบท 2.2. ความสัมพันธ์สมมูล R จะแบ่งกั้นเซต S ออก โดยมีผลแบ่งกั้นคือ $P = \{[a_1]_R, [a_2]_R, [a_3]_R, \ldots\}$ เป็นเซตของชั้นสมมูลของ R

บทนิยาม 2.4. เซตของชั้นสมมูลทั้งหมดของ S ผ่านความสัมพันธ์ R จะเขียนแทนด้วย S/R เรียกว่าเซตผลหาร (Quotient set) ของ S เทียบกับ R

ตัวอย่าง 11. $P = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ $S = \{1, 2, 3, 4\}$

ตัวอย่าง 12. $P = \{\{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}, \{\ldots, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}\}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ $\mathbb{Z}$ ออกไปตามภาวะคู่-คี่

ตัวอย่าง 13. เราทราบจากทฤษฎีบท 2.2 ว่าความสัมพันธ์สมมูลจะแบ่งกั้น S ได้ พิจารณาความสัมพันธ์ตามตัวอย่างที่ 7 สามารถพิสูจน์ได้ว่า R จะแบ่ง $\mathbb{Z}$ ออกไปตามเศษจากการด้วย m โดยมีเซตผลหารคือ $\{[0], [1], \ldots, [m-1]\}$

แบบฝึกหัด

1. จงเขียนความสัมพันธ์สมมูลทั้งหมดบน $\{1, 2, 3\}$
2. ให้ R เป็นความสัมพันธ์สมมูลบนเซต $\mathcal{P}(\{1, 2, \ldots, n\})$ โดย aRb ก็ต่อเมื่อ $|a| = |b|$ จงพิสูจน์ว่า R เป็นความสัมพันธ์สมมูล และเขียนชั้นสมมูลทั้งหมดของ R เมื่อ $n = 5$
3. ให้ L เป็นความสัมพันธ์สมมูลบนเซต $\mathbb{Z}$ โดย aLb ก็ต่อเมื่อ $a = b = 0$ หรือ $ab > 0$ จงพิสูจน์ว่า L เป็นความสัมพันธ์สมมูล
4. จงแสดงว่า ความสัมพันธ์ในตัวอย่าง 8 เป็นความสัมพันธ์สมมูล
5. จงแสดงว่า ความสัมพันธ์ในตัวอย่าง 9 เป็นความสัมพันธ์สมมูล
6. ผลแบ่งกั้นก็ทำให้เกิดความสัมพันธ์สมมูลได้เหมือนกัน จงแสดงว่าถ้า $P = \{A_1, A_2, \ldots A_n\}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ S แล้วความสัมพันธ์

   aRb ก็ต่อเมื่อ a, b อยู่ในชั้นสมมูลเดียวกัน (นั่นคือ $a, b \in A_i$ สำหรับบาง i)

   จะเป็นความสัมพันธ์สมมูล
7. ให้ $\mathbb{Z}_9 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ เป็นเซตของจำนวนเต็มตั้งแต่ 0 ถึง 8

   สำหรับ $a, b \in \mathbb{Z}_9$ กำหนดให้ $a \sim b$ ก็ต่อเมื่อ 9 หาร $a^2 - b^2$ ลงตัว

   $\sim$ เป็นความสัมพันธ์สมมูลหรือไม่ ถ้าใช่จงหาชั้นสมมูลทั้งหมดของ $\sim$
8. ดูเหมือนว่าความสัมพันธ์ใดก็ตาม ถ้ามีสมบัติสมมาตรและสมบัติถ่ายทอด จะมีสมบัติสะท้อนด้วย

   พิสูจน์? ให้ aRb จาก R มีสมบัติสมมาตร ดังนั้น bRa ด้วย

   และจาก aRb กับ bRa โดยสมบัติถ่ายทอดของ R ดังนั้น aRa $\square$

   ข้อความข้างต้นจริงหรือไม่ (*ข้อเสนอแนะ: จงแสดงว่ามีความสัมพันธ์ที่มีสมบัติสมมาตร และสมบัติถ่ายทอด แต่ไม่มีสมบัติสะท้อน*)

9. จงแสดงว่า $C = \{\{a, b, c\}, \{d, e\}\}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ $A = \{a, b, c, d, e\}$
10. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.2
11. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.1 ด้วยการแสดงว่า $(1) \to (2),\ (2) \to (3)$ และ $(3) \to (1)$

3 การเรียงอันดับ

เราคงคุ้นเคยกับอันดับ (มากกว่า, น้อยกว่า, ฯลฯ) บนจำนวนจริงหรือจำนวนนับ ต่อไปนี้เป็นการขยายลำดับให้ครอบคลุมเซตอื่นมากขึ้น โดยยังคงมีสมบัติที่เหมือนกับอันดับบนจำนวนจริง

บทนิยาม 3.1. จะเรียกว่าความสัมพันธ์ R มีสมบัติปฏิสมมาตร ถ้า aRb และ bRa แล้วจะต้องได้ว่า $a = b$ สำหรับทุก ๆ a, b

ในอีกแบบหนึ่ง ความสัมพันธ์ R เป็นความสัมพันธ์ปฏิสมมาตร ก็ต่อเมื่อ ถ้า $a \neq b$ แล้ว aRb และ bRa พร้อมกันไม่ได้

ตัวอย่าง 14. สมบัติปฏิสมมาตรสำคัญสำหรับลำดับ ดังเช่นสมบัติการน้อยกว่าในระบบจำนวนจริง ถ้า a, b เป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกันสองจำนวน และ $a \leq b$ แล้ว $b \not\leq a$ (นั่นคือ aRb และ bRa เกิดพร้อมกันไม่ได้)

บทนิยาม 3.2. ถ้าความสัมพันธ์ R บน A มีสมบัติปฏิสมมาตร สมบัติถ่ายทอดและสมบัติสะท้อน จะเรียก R ว่าเป็นอันดับบางส่วน (partial order) บน A

จะเขียน $a \preceq b$ แทน aRb

ตัวอย่าง 15. เห็นได้ชัดว่า $\leq$ และ $\geq$ ต่างก็เป็นอันดับบางส่วนบน $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ และ $\mathbb{R}$

ตัวอย่าง 16. การเป็นสับเซตก็เป็นอันดับบางส่วนรูปแบบหนึ่ง ให้ $\subseteq$ เป็นความสัมพันธ์บน $\mathcal{U}$ ซึ่งพิสูจน์ได้ดังนี้

- (สมบัติสะท้อน) เห็นได้ชัดว่า $A \subseteq A$ ทุก ๆ $A \in \mathcal{U}$
- (สมบัติปฏิสมมาตร) ให้ $A, B \in \mathcal{U}$ เป็นเซตใด ๆ ถ้า $A \subseteq B$ และ $B \subseteq A$ แล้วจากนิยามการเท่ากันของเซตจะได้ $A = B$ ดังนั้น $\subseteq$ มีสมบัติปฏิสมมาตร
- (สมบัติถ่ายทอด) ให้ $A \subseteq B$ และ $B \subseteq C$ เห็นได้ชัดว่า $A \subseteq C$ ด้วย ดังนั้น $\subseteq$ มีสมบัติถ่ายทอด

ตัวอย่าง 17. การหารลงตัวบน $\mathbb{N}$ เป็นอันดับบางส่วนเช่นกัน กำหนดให้ $a \preceq b$ ก็ต่อเมื่อ $a|b$ ลงตัว แล้ว $\preceq$ จะเป็นอันดับบางส่วนบน $\mathbb{N}$

บทนิยาม 3.3. เซตที่มีอันดับบางส่วน จะเรียกว่าเซตอันดับบางส่วน (partially ordered set, poset)

บทนิยาม 3.4. สมาชิก a, b ในเซต A จะเปรียบเทียบกันได้ (comparable) ภายใต้อันดับบางส่วน $\preceq$ ก็ต่อเมื่อ $a \preceq b$ หรือ $b \preceq a$ เป็นจริง

ในตัวอย่างที่ 16 และ 17 จะเห็นว่ามีสมาชิกที่ไม่สามารถเปรียบเทียบกันได้ว่า สมาชิกใดมากกว่าหรือน้อยกว่าภายใต้ลำดับนั้น เช่น $\{1, 2\}$ และ $\{2, 4\}$ ไม่สามารถเปรียบเทียบกันได้ เพราะ $\{1, 2\} \not\subseteq \{2, 4\}$ และ $\{2, 4\} \not\subseteq \{1, 2\}$ พร้อมกัน

ในขณะที่จำนวนจริง เราสามารถเปรียบเทียบได้ทันทีเลยว่าจำนวนจริงตัวไหนจะมากกว่าหรือน้อยกว่ากัน เซตที่สมาชิกทุกตัวเปรียบเทียบกันได้มีคุณสมบัติดี จึงมีชื่อเรียกเฉพาะ

บทนิยาม 3.5. เซตที่สมาชิกทุกตัวเปรียบเทียบกันได้ว่ามากกว่าหรือน้อยกว่า เรียกว่าเซตอันดับทุกส่วน (totally ordered set) หรือเซตอันดับเชิงเส้น (linearly ordered set) หรือโซ่ (chain)

บทนิยาม 3.6. เซตที่สมาชิกทุกตัวเปรียบเทียบกันไม่ได้เลยว่ามากกว่าหรือน้อยกว่า เรียกว่าปฏิโซ่ (antichain)

บทนิยาม 3.7. สมาชิก a, b ใด ๆ ถ้า $a \preceq b$ และ $a \neq b$ จะเรียกว่า a น้อยกว่า b โดยแท้ เขียนแทนด้วย $a \prec b$

เรามีทฤษฎีบทสำคัญของอันดับบางส่วน

ทฤษฎีบท 3.1 (กฎไตรวิภาคแบบอ่อน)**.** ให้ $\preceq$ เป็นอันดับบางส่วนบน A และ $a, b \in A$ เป็นสมาชิกใด ๆ ข้อความต่อไปนี้เป็นจริงได้มากสุดข้อความเดียวเท่านั้น:

$$a \prec b,\ b \prec a \text{ หรือ } a = b$$

พิสูจน์. ให้ $a, b \in A$

- ถ้า $a \prec b$ จากนิยามจะได้ $a \preceq b$ แต่ $a \neq b$

  ต่อไปสมมติให้ $b \prec a$ เพื่อหาข้อขัดแย้ง จากนิยามจะได้ว่า $b \preceq a$ โดยที่ $b \neq a$ ขัดแย้งกับสมบัติปฏิสมมาตรของ $\preceq$ ดังนั้น $b \not\prec a$

- ถ้า $b \prec a$ พิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับด้านบนได้ว่า $a \not\prec b$ และ $b \neq a$

- ถ้า $a = b$ จากนิยามจะเห็นได้ว่า $a \prec b$ และ $b \prec a$ ไม่มีทางเป็นจริงได้เลย

$\square$

แบบฝึกหัด

1. จงแสดงว่า $=$ เป็นความสัมพันธ์ปฏิสมมาตรบน $\mathbb{R}$

2. จงแสดงว่า Δ_A เป็นความสัมพันธ์ปฏิสมมาตรบนเซต A

3. จงพิสูจน์ว่า R เป็นความสัมพันธ์ปฏิสมมาตรบน A ก็ต่อเมื่อ $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$

4. จะเรียก R ว่าเป็นความสัมพันธ์อสมมาตรบน A ก็เมื่อ ถ้า aRb แล้ว $b \not R\, a$
   และ R เป็นความสัมพันธ์ไม่สะท้อน ถ้า $a \not R\, a$ ทุก ๆ $a \in A$

   จงแสดงว่า R เป็นความสัมพันธ์อสมมาตร ก็ต่อเมื่อ R เป็นความสัมพันธ์ปฏิสมมาตรและไม่สะท้อน

5. ให้ R เป็นความสัมพันธ์ถ่ายทอด แล้ว R จะเป็นความสัมพันธ์อสมมาตร ก็ต่อเมื่อ R เป็นความสัมพันธ์ไม่สะท้อน

6. ให้ R เป็นความสัมพันธ์บน A จงแสดงว่า R เป็นความสัมพันธ์สะท้อน ก็ต่อเมื่อ $(A \times A) - R$ เป็นความสัมพันธ์ไม่สะท้อน

7. ให้ R เป็นความสัมพันธ์บน A จงแสดงว่า R เป็นความสัมพันธ์อสมมาตร ก็ต่อเมื่อ $R \cap R^{-1} = \emptyset$

8. ให้ $\leq$ เป็นความสัมพันธ์บน $\mathbb{R}^2$ โดยที่

$$(a,b) \leq (c,d) \text{ ก็ต่อเมื่อ } a \leq c \text{ และ } b \leq d$$

จงแสดงว่า $\leq$ เป็นอันดับบางส่วน

9. ให้ R เป็นอันดับบางส่วน แล้ว R^{-1} เป็นอันดับบางส่วน

10. ให้ $\preceq$ เป็นความสัมพันธ์บน A^2 โดยที่ A มีอันดับทุกส่วน $\leq$ อยู่แล้ว และกำหนดให้

$$(a,b) \preceq (c,d) \text{ ก็ต่อเมื่อ } a < c \text{ หรือไม่เช่นนั้น } a = c \text{ และ } b \leq d$$

จงแสดงว่า $\preceq$ เป็นอันดับทุกส่วน

11. จงพิสูจน์ว่า ถ้า A เป็นเซตอันดับทุกส่วน แล้วกฎไตรวิภาคเป็นจริงใน A

ทฤษฎีบท 3.2 (กฎไตรวิภาค)**.** ให้ A เป็นเซตอันดับทุกส่วน ข้อความต่อไปนี้เป็นจริงเพียงข้อความเดียว: $a \prec b,\ b \prec a$ หรือ $a = b$ สำหรับทุก $a, b \in A$

4 ขอบเขต

เราเคยเห็นแล้วว่าเซตของจำนวนนับมีสมาชิกค่าน้อยสุด (คือ 1) ต่อไปเราจะขยายความหมายของสมาชิกน้อยสุดและมากสุดให้ครอบคลุมเซตอันดับ

บทนิยาม 4.1. ให้ $(A, \preceq)$ เป็นเซตอันดับบางส่วน และ $m \in A$

- m จะเป็นสมาชิกมากสุดใน A ก็เมื่อ $a \preceq m$ สำหรับทุก $a \in A$
- m จะเป็นสมาชิกน้อยสุดใน A ก็เมื่อ $m \preceq a$ สำหรับทุก $a \in A$

ทฤษฎีบท 4.1. สมาชิกค่ามากสุดมีได้ค่าเดียว

พิสูจน์. ให้ m และ m' เป็นสมาชิกค่ามากสุดของ A ดังนั้น $a \preceq m$ และ $a \preceq m'$ สำหรับทุก $a \in A$
ดังนั้น $m \preceq m'$ และ $m' \preceq m$ จากสมบัติปฏิสมมาตร จะได้ว่า $m = m'$ $\square$

ตัวอย่าง 18. อันดับที่เกิดจากการหารลงตัวบน $\mathbb{N}$ มีสมาชิกน้อยสุดคือ 1 แต่ไม่มีสมาชิกมากสุด

บทนิยาม 4.2. ให้ A เป็นเซตอันดับภายใต้ $\preceq$ และ $B \subseteq A$

- $u \in A$ เป็นขอบเขตบนของ B ถ้า $b \preceq u$ สำหรับทุก $b \in B$
- ขอบเขตบน u' ของ B จะเป็นขอบเขตบนน้อยสุด ก็ต่อเมื่อ มันน้อยกว่าขอบเขตบนทุกตัวของ B นั่นคือ $u' \preceq u$ สำหรับทุกขอบเขตบน u
- $u \in A$ เป็นขอบเขตล่างของ B ถ้า $u \preceq b$ สำหรับทุก $b \in B$

- ขอบเขตล่าง u' ของ B จะเป็นขอบเขตล่างมากสุด ก็ต่อเมื่อ มันมากกว่าขอบเขตล่างทุกตัวของ B นั่นคือ $u \preceq u'$ สำหรับทุกขอบเขตล่าง u

ทฤษฎีบท 4.2. ขอบเขตบนน้อยสุดสำหรับเซต $B \subset A$ ใด ๆ มีได้ค่าเดียว

ตัวอย่าง 19. ช่วง $(3, 5)$ เป็นสับเซตของ $\mathbb{R}$ สังเกตว่า $2\pi,\ 5$ และ 10 เป็นขอบเขตบนของเซตนี้ทั้งหมด และขอบเขตบนน้อยสุดคือ 5

บทนิยาม 4.3. ให้ A เป็นเซตอันดับ และ $m \in A$

- m เป็นสมาชิกใหญ่สุดเฉพาะกลุ่ม (maximal element) ของเซต A ถ้า $m \not\prec a$ สำหรับทุก $a \in A$
- m เป็นสมาชิกเล็กสุดเฉพาะกลุ่ม (minimal element) ของเซต A ถ้า $a \not\prec m$ สำหรับทุก $a \in A$

ตัวอย่าง 20. อันดับบน $\mathcal{P}(A)$ โดย $\subseteq$ มีสมาชิกใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มคือ $\mathcal{P}(A)$ และสมาชิกเล็กสุดเฉพาะกลุ่ม คือ $\emptyset$

บทนิยาม 4.4. เซตอันดับทุกส่วน $(A, \preceq)$ จะเป็นเซตจันอันดับดี และ $\preceq$ เป็นอันดับดี ถ้าทุกเซตย่อยของ A มีสมาชิกน้อยสุดในเซตนั้น

อันที่จริง เราให้เป็นสัจพจน์ว่า $\mathbb{N}$ เป็นเซตจัดอันดับดี เนื่องจากข้อความนี้พิสูจน์ไม่ได้

แบบฝึกหัด

1. จงแสดงว่าสมาชิกค่าน้อยสุดมีได้ค่าเดียว
2. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.2
3. จงพิสูจน์ว่าขอบเขตล่างมากสุดมีได้ค่าเดียว
4. จงพิสูจน์ว่าเซตอันดับดีมีสมาชิกน้อยสุด
5. จงแสดงว่าสับเซตไม่ว่างของเซตจัดอันดับดีเป็นเซตจัดอันดับดีด้วย จงพิสูจน์ว่า $\{1, 2, \ldots, n\}$ เป็นเซตอันดับดีสำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$
6. จะเรียก $B = \{a_i \colon i \in \mathbb{N}\}$ ว่าเป็นเซตลด ถ้า $i < j$ แล้วจะได้ว่า $a_i \succ a_j$ สำหรับทุก $i, j \in \mathbb{N}$

   จงพิสูจน์ว่า A เป็นเซตจัดอันดับดี ถ้า A ไม่มีสับเซตที่เป็นสับเซตลด
7. จงพิสูจน์ว่า $\{1/n \colon n \in \mathbb{N}\}$ ไม่เป็นเซตจัดอันดับดี
8. จงแสดงว่าเซตอันดับทุกส่วนที่เป็นเซตจำกัด เป็นเซตอันดับดี
9. จงแสดงว่าเซตอันดับดีมีสมาชิกน้อยสุดได้เพียงตัวเดียว
10. ให้ $B \subseteq A$ และ A เป็นเซตอันดับดี ถ้า B มีขอบเขตบน แล้ว B มีสมาชิกมากสุด
11. จงพิสูจน์ว่า หลักจัดอันดับดีของ $\mathbb{N}$ สมมูลกับหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์