ลำดับและอนุกรม

March 16, 2020

1 ลำดับ

บทนิยาม 1.1. ลำดับอนันต์คือฟังก์ชันจากเซตของจำนวนนับ ไปยังเซตอื่น

$$f\colon \mathbb{N} \to A$$

ในที่นี้ศึกษาลำดับของจำนวนจริง นั่นคือ $A = \mathbb{R}$ โดยนิยมเขียนลำดับด้วยสัญลักษณ์ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = a_1, a_2, \ldots$ โดยมีความหมายว่า $f(n) = a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

สังเกต. จากนิยามของฟังก์ชัน ลำดับสองลำดับจะเท่ากันก็เมื่อ $a_i = b_i, \quad \forall i \in \mathbb{N}$

ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นลำดับทั้งสิ้น เรานิยมเขียนลำดับด้วยตัวฟังก์ชันแทน

- $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{n^2\} = 1, 4, 9, 16, \ldots$
- $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{n + \frac{1}{n}\right\} = 2,\ 5/2,\ 10/3,\ 17/4, \ldots$
- $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{n^2+1}{n}\right\}$
- $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\sin(n\pi)\}$

เราสนใจค่าของลำดับเมื่อมันมีค่ามากว่าใกล้เคียงค่าใด เช่น $\frac{1}{n} \to 0$ เมื่อ n มีค่ามาก ๆ

บทนิยาม 1.2. L เป็นลิมิตของลำดับ a_n ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $N \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $|a_n - L| < \varepsilon$ สำหรับทุก $n \geq N$ เขียนแทนด้วย

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

a_n ถ้าสอดคล้องเงื่อนไขดังกล่าวจะเรียกว่าลำดับลู่เข้า (convergent sequence) ถ้าไม่มีจำนวนจริงดังกล่าว จะเรียกลำดับ a_n ว่าลำดับลู่ออก (divergent sequence) และลิมิตไม่มีค่า

สังเกต. จะใช้สัญลักษณ์ $a_n \to L$ แทน $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

เพื่ออธิบายสมบัติของลำดับให้ดีขึ้น เราจะแทนสัญลักษณ์ให้ลำดับที่มีค่าเพิ่มขึ้นไปเรื่อย ๆ ด้วย

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า a_n มีค่าลดลงไปเรื่อย ๆ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

ให้ระลึกเสมอว่า ∞ ไม่ใช่จำนวนจริง และลำดับ a_n ยังเป็นลำดับลู่ออกอยู่

การพิสูจน์ว่าลำดับ a_n ลู่เข้าโดยใช้บทนิยามเป็นการยุ่งยาก เรามีทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง

ทฤษฎีบท 1.1. ลิมิตของลำดับมีได้ค่าเดียว นั่นคือถ้า $a_n \to l$ และ $a_n \to m$ แล้ว $l = m$

ทฤษฎีบท 1.2. ให้ a_n และ b_n เป็นลำดับของจำนวนจริง

1. ถ้า $a_n = c$ แล้ว $a_n \to c$ เมื่อ $n \to \infty$
2. ถ้า $a_n \to a$ และ $c \in \mathbb{R}$ แล้ว $ca_n \to ca$ เมื่อ $n \to \infty$
3. ถ้า $a_n \to a$ และ $b_n \to b$ แล้ว $a_n + b_n \to a + b$ เมื่อ $n \to \infty$
4. ถ้า $a_n \to a$ และ $b_n \to b$ แล้ว $a_n b_n \to ab$ เมื่อ $n \to \infty$
5. ถ้า $a_n \neq 0$ และ $a \neq 0$ และ $a_n \to a$ แล้ว $1/a_n \to 1/a$ เมื่อ $n \to \infty$

บทพิสูจน์. บทพิสูจน์ง่ายและให้ไว้เป็นแบบฝึกหัด □

ทฤษฎีบท 1.3. กำหนดให้ a_n เป็นลำดับของจำนวนจริง ถ้า

- $\lim_{n\to\infty} a_n = L$
- f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด L
- f นิยามสำหรับทุกค่า a_n

แล้ว $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(L)$

บทพิสูจน์. บทพิสูจน์ยากและให้ไว้เป็นแบบฝึกหัดท้ายเอกสาร □

ตัวอย่าง 1. เราจะพิสูจน์ว่า $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^2 = 4$

กำหนดให้ $f(x) = x^2$ ซึ่งต่อเนื่องบน $\mathbb{R}$

เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2$

f ต่อเนื่องที่จุด $x = 2$ และ f นิยามทุกค่า $\frac{2n+1}{n}$ จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^2 = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n}\right)^2 = 2^2 = 4$$

ทฤษฎีบท 1.4. ให้ f เป็นฟังก์ชันนิยามสำหรับทุกค่า $x \geq 1$ และ $L \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$
ถ้า $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ และ $f(n) = a_n$ สำหรับทุก $n = 1, 2, \ldots$
แล้ว $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

สังเกต. สามารถปรับเงื่อนไขของ f ให้อ่อนลงได้ โดยเลื่อนให้ f นิยามทุกค่า $x \geq n_0$ และ $f(n) = a_n$ สำหรับ $n \geq n_0$ ผลจากทฤษฎีบทยังคงเดิม

ตัวอย่าง 2. จงหา $\lim_{n\to\infty} (\ln n)/n$

วิธีทำ. ตรวจสอบเงื่อนไข ฟังก์ชัน $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ นิยามทุกค่า $x \geq 1$ และมีค่าเท่ากับลำดับสำหรับทุก n โดยทฤษฎีจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} (\ln n)/n = 0$ □

ทฤษฎีบท 1.5 (ทฤษฎีบทแซนด์วิช)**.** ให้ $a_n,\ b_n,\ c_n$ เป็นลำดับที่ $a_n \leq b_n \leq c_n$ สำหรับทุก ๆ $n \geq N$ สำหรับบางค่า $N \in \mathbb{N}$ และ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$$

แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$

ตัวอย่าง 3. จงหาลิมิตของ $(\cos n)/n$ เมื่อ $n \to \infty$

วิธีทำ. จาก $-1/n \leq (\cos n)/n \leq 1/n$ และ $\lim_{n\to\infty} -1/n = \lim_{n\to\infty} 1/n = 0$
ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} (\cos n)/n = 0$ □

ลิมิตต่อไปนี้พบได้บ่อย และควรจำได้

ทฤษฎีบท 1.6.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} x^{1/n} = 1 \ (x > 0)$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0 \ (|x| < 1)$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$

แบบฝึกหัด

1. ลำดับต่อไปนี้ลู่เข้าหรือไม่

(a) $a_n = 2 + (0.1)^n$

(b) $a_n = \dfrac{1-2n}{1+2n}$

(c) $a_n = \sin(\pi/2 + 1/n)$

(d) $a_n = (8)^{1/n}$

(e) $a_n = (3/n)^{1/n}$

(f) $a_n = \dfrac{3^n}{n^3}$

(g) $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$

(h) $a_n = \sqrt[n]{n^2}$

(i) $a_n = \frac{n!}{n^n}$

(j) $a_n = \frac{(-5)^n}{n!}$

(k) $a_n = \ln(1 + 1/n)^n$

(l) $a_n = n - \sqrt{n^2 - n}$

(m) $a_n = (\dfrac{1}{n})^{1/\ln n}$

2. จงหา $\lim\limits_{n\to\infty} n \ln\left(1 + \dfrac{2}{n}\right)$

3. (ต้องทำ) จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 1.6

4. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 1.2

5. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 1.3

6. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 1.4

7. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 1.5

8. จงแสดงว่า $a_n = \dfrac{1}{1+n^2} + \dfrac{2}{2+n^2} + \cdots + \dfrac{n}{n+n^2}$ ลู่เข้า

2 ลำดับย่อย

เราสนใจลำดับที่สร้างขึ้นจากลำดับใหม่ เช่น

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \ldots$$

เราอาจเลือกสมาชิกบางตัว เช่น $4, 16, 36, \ldots$ มาสร้างลำดับใหม่

บทนิยาม 2.1. ให้ a_n เป็นลำดับ แล้วสร้างลำดับใหม่ b_n โดยที่ $b_k = a_{n_k}$ โดยที่ $n_1 < n_2 < \ldots$ เป็นลำดับของจำนวนนับ

จะเรียก b_k ว่าลำดับย่อยของ a_k

ทฤษฎีบท 2.1. ให้ a_n เป็นลำดับที่ $a_n \to L$ โดยที่ $L \in \mathbb{R}$ แล้วทุกลำดับย่อยของ a_n จะมีลิมิตเป็น L

ทฤษฎีบท 2.2. ถ้ามีลำดับย่อยของ a_n ลู่ออก แล้ว a_n ลู่ออก

ทฤษฎีบท 2.3. ถ้ามีลำดับย่อยของ a_n ที่มีลิมิตไม่เท่ากัน แล้ว a_n ลู่ออก

ตัวอย่าง 4. จงแสดงว่า $\sin(n\pi/2)$ ลู่ออก

วิธีทำ. แจงแจงสมาชิกบางพจน์ ได้ว่า

$$\begin{aligned} a_n &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(\frac{2\pi}{2}\right),\ \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right),\ \dots \\ &= 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots \end{aligned}$$

มีลำดับย่อย $1, 1, 1, 1, \dots$ และ $0, 0, 0, 0, \dots$ และลิมิตของสองลำดับไม่เท่ากัน ดังนั้น $\sin(n\pi/2)$ ลู่ออก □

แบบฝึกหัด

1. อธิบายว่าทำไม

$$1).\quad (-1)^n \frac{n^2}{1+5n},\quad 2).\quad \frac{4n+1}{2n}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

   จึงเป็นลำดับลู่ออก

2. พิสูจน์ทฤษฎีบท 2.1

3. สำหรับคนที่ชอบ(ทฤษฎีบทโบลซาโน-ไวแยร์สตราส์) ถ้า a_n เป็นลำดับของจำนวนจริงที่มีขอบเขต แล้วจะมีลำดับย่อย a_{n_k} ที่ลู่เข้า

3 ลำดับทางเดียวและขอบเขต

บทนิยาม 3.1. ลำดับไม่ลด คือลำดับที่แต่ละพจน์มีค่าเพิ่มขึ้นหรือเท่าเดิม: $a_n \le a_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$

บทนิยาม 3.2. ลำดับไม่เพิ่ม คือลำดับที่แต่ละพจน์มีค่าลดลงหรือเท่าเดิม: $a_n \ge a_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$

บทนิยาม 3.3. ลำดับทางเดียวคือลำดับที่เป็นลำดับไม่เพิ่มหรือลำดับไม่ลด

ทฤษฎีบท 3.1. ถ้า $a_{n+1} - a_n \ge 0$ แล้ว a_n เป็นลำดับไม่ลด
ถ้า $a_{n+1} - a_n \le 0$ แล้ว a_n เป็นลำดับไม่เพิ่ม

ทฤษฎีบท 3.2. ถ้า $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ แล้ว a_n เป็นลำดับไม่ลด
ถ้า $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ แล้ว a_n เป็นลำดับไม่เพิ่ม

ทฤษฎีบท 3.3. ให้ f เป็นฟังก์ชันหาอนุพันธ์ได้ทุกค่า $x \geq 1$ และ $f(n) = a_n$ สำหรับทุก $n = 1, 2, 3, \ldots$
ถ้า $f'(x) \leq 0$ ทุกค่า $x \geq 1$ แล้ว a_n เป็นลำดับไม่เพิ่ม
ถ้า $f'(x) \geq 0$ ทุกค่า $x \geq 1$ แล้ว a_n เป็นลำดับไม่ลด

ตัวอย่าง 5. จงตรวจสอบลำดับ $\dfrac{n}{n+1}$

วิธีทำ. ให้ $a_n = \frac{n}{n+1}$ ดังนั้น $a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$
พิจารณา

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} \\
&= \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)} \\
&= \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+2)(n+1)} \\
&= \frac{1}{(n+2)(n+1)} \geq 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น $a_{n+1} \geq a_n$ สรุปว่า a_n เป็นลำดับไม่ลด □

สมบัติที่สำคัญอีกข้อของลำดับคือการมีขอบเขต

บทนิยาม 3.4. ลำดับ a_n มีขอบเขตบน ถ้ามีจำนวนจริง M ที่ทำให้ $a_n \leq M$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ เรียก M ว่าขอบเขตบนของ a_n
ขอบเขตบน M' จะเป็นขอบเขตบนน้อยสุด ก็ต่อเมื่อ มันน้อยกว่าขอบเขตบนทุกตัวของ a_n นั่นคือ $M' \leq M$ สำหรับทุกขอบเขตบน M

บทนิยาม 3.5. ลำดับ a_n มีขอบเขตล่าง ถ้ามีจำนวนจริง m ที่ทำให้ $a_n \geq m$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ เรียก m ว่าขอบเขตล่างของ a_n
ขอบเขตล่าง m' จะเป็นขอบเขตล่างมากสุด ก็ต่อเมื่อ มันมากกว่าขอบเขตล่างทุกตัวของ a_n นั่นคือ $m' \geq m$ สำหรับทุกขอบเขตล่าง m

บทนิยาม 3.6. ถ้าลำดับ a_n มีทั้งขอบเขตล่างและขอบเขตบน แล้ว a_n จะถูกเรียกว่าลำดับมีขอบเขต

ตัวอย่าง 6. ลำดับ $\frac{1}{n}$ เป็นลำดับมีขอบเขต เพราะมี 0 เป็นขอบเขตล่าง และ 1 เป็นขอบเขตบน

ตัวอย่าง 7. ลำดับ $e^{1/n}$ เป็นลำดับมีขอบเขต เพราะมี -100 เป็นขอบเขตล่าง และ 1000 เป็นขอบเขตบน

เรามีทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับการลู่เข้าของฟังก์ชันทางเดียว

ทฤษฎีบท 3.4 (Monotone sequence theorem)**.** ถ้าลำดับ a_n มีขอบเขตและเป็นลำดับทางเดียว แล้ว a_n ลู่เข้า

ตัวอย่าง 8. จงแสดงว่าลำดับ $(5^n)/(2n)!$ เป็นลำดับลู่เข้า

วิธีทำ. จะแสดงว่าลำดับ $(5^n)/(2n)!$ เป็นลำดับทางเดียวและมีขอบเขต

ให้ $a_n = (5^n)/(2n)!$ ดังนั้น $a_{n+1} = (5^{n+1})/(2(n+1))! = (5^{n+1})/(2n+2)!$

จะได้ว่า

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{5^{n+1}}{(2n+2)!}}{\frac{5^n}{(2n)!}} = \frac{5^{n+1}}{5^n} \cdot \frac{(2n)!}{(2n+2)!}$$

$$= 5 \cdot \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

เพราะว่า $0 \leq a_n \leq a_1 = 5/2$ ดังนั้น a_n มีขอบเขต

เพราะฉะนั้น a_n ลู่เข้า □

แบบฝึกหัด

1. ตรวจสอบลำดับต่อไปนี้

   (a) $a_n = \dfrac{3n+1}{n+1}$

   (b) $a_n = \dfrac{(2n+3)!}{(n+1)!}$

   (c) $a_n = \dfrac{2^n - 1}{3^n}$

   (d) $a_n = \dfrac{4-n}{2n+3}$

2. จงแสดงว่า $a_n = \frac{2^n}{n!}$ เป็นลำดับลู่เข้า

3. พิสูจน์ทฤษฎีบท 3.4

4. ให้ $a_1 = \sqrt{2},\ a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$

- ใช้หลักอุปนัยพิสูจน์ว่า a_n เป็นลำดับเพิ่ม และมีขอบเขต
- จงพิสูจน์ว่า a_n ลู่เข้า

5. จงแสดงว่า $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$ ลู่เข้า
6. ให้ $x_0 \geq 2$ และ $x_{n+1} = 2 + \sqrt{x_n - 2}$ สำหรับ $n \in \mathbb{N}$

   จงแสดงว่า $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$ หรือ 3

4 อนุกรมอนันต์

บทนิยาม 4.1. ให้ a_n เป็นลำดับ เรียกผลบวก $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ ว่าอนุกรมอนันต์ เขียนแทนด้วย

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

เรานิยามลิมิตของอนุกรมอนันต์ ให้เป็นลิมิตของผลบวกย่อย

บทนิยาม 4.2. ให้ a_n เป็นลำดับ เรียกผลบวก $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k$ ว่าผลบวกย่อยลำดับที่ 1 เขียนแทนด้วย

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$$

และกำหนดให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$

บทนิยาม 4.3. ถ้า $\lim_{n\to\infty} S_n$ หาค่าได้ แล้วจะเรียกว่าอนุกรมอนันต์ลู่เข้า และค่าเท่ากับ S ไม่เช่นนั้น อนุกรมลู่ออก

ทฤษฎีบท 4.1. ถ้าอนุกรมอนันต์ $\sum a_n$ ลู่เข้า แล้ว $a_n \to 0$

บทแย้งสลับที่ของทฤษฎีบทนี้ใช้ตรวจสอบอนุกรมลู่ออก เรียกว่าการทดสอบการลู่ออก (Divergence test)

ทฤษฎีบท 4.2 (Divergence test)**.** ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ (หาค่าไม่ได้ หรือได้จำนวนจริงอื่นที่ไม่ใช่ 0) แล้วอนุกรมอนันต์ $\sum a_n$ ลู่ออก

ตัวอย่าง 9. อนุกรมอนันต์

$$\sum_{n=1}^{\infty} = \frac{n+1}{n} = 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \cdots$$

เป็นอนุกรมลู่ออก

อนุกรมลู่เข้าอนุกรมแรกที่เราจะพูดถึง คือ อนุกรมเรขาคณิต

บทนิยาม 4.4. อนุกรมเรขาคณิต คืออนุกรมในรูป

$$a + ar + ar^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

เมื่อ $a \neq 0$ และเรียก r ว่าอัตราส่วนร่วม

เราสามารถหาสูตรทั่วไปสำหรับผลบวกย่อยของอนุกรมเรขาคณิตได้ ให้ $s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$

$$\begin{aligned}
s_n &= a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \\
rs_n &= ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \\
s_n - rs_n &= a - ar^n \\
s_n(1-r) &= a(1-r^n) \\
s_n &= \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \quad (r \neq 1)
\end{aligned}$$

ซึ่งลู่เข้าก็ต่อเมื่อ $|r| < 1$ และจะทำให้ $r^n \to 0$ เมื่อ $n \to \infty$ จะได้ว่า $s_n \to \frac{a}{1-r}$ ในขณะที่ถ้า $|r| > 1$ แล้ว $r^n \to \infty$

ถ้า $r = 1$ อนุกรม $s_n = a+a+a+\cdots+a = na$ ลู่ออก ในทำนองเดียวกัน $r = -1$ ลู่ออกด้วย

ทฤษฎีบท 4.3. อนุกรมเรขาคณิตลู่เข้าเฉพาะเมื่อ $|r| < 1$

ตัวอย่าง 10. จงหาค่าของอนุกรม

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \cdots$$

วิธีทำ. จัดรูปจะได้

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1/3}{1-1/2} = \frac{2}{3}$$

เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่ $a = 1/3$ และ $r = 1/2$ ซึ่งลู่เข้าเพราะ $|r| = 1/2 < 1$ □

ทฤษฎีบท 4.4. ให้ $\sum a_n = A$ และ $\sum b_n = B$ ต่างก็เป็นอนุกรมลู่เข้า

1. $\sum a_n + b_n = A + B$
2. $\sum ca_n = cA$ เมื่อ $c \in \mathbb{R}$

เทคนิคสุดท้ายในบทนี้คืออนุกรมเทเลสโคป ซึ่งพจน์ในอนุกรมจะตัดกันไป

ตัวอย่าง 11. จงหาค่าของ $\sum \frac{1}{n(n+1)}$

วิธีทำ. สังเกตว่า

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \\ s_k &= 1 - \frac{1}{k}\end{aligned}$$

แต่จาก $s_k \to 1$ ดังนั้น $\sum \frac{1}{n(n+1)} \to 1$ □

แบบฝึกหัด

1. จงหาผลรวมย่อยที่ n ของอนุกรมต่อไปนี้ พร้อมทั้งค่าของอนุกรม
   - $2 + \dfrac{2}{5} + \dfrac{2}{25} + \cdots + \dfrac{2}{5^{n-1}} + \cdots$
   - $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{2^{n-1}} + \cdots$
2. จงหาค่าของอนุกรม
   - $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}$
   - $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{4^n}$
   - $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{4^n} + \frac{1}{3^n}\right)$
   - $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5^n}{6^{n-1}}\right)$
3. แปลงทศนิยมซ้ำ $0.2424\ldots$ ให้เป็นเศษส่วน
4. ตรวจสอบอนุกรมต่อไปนี้
   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+15}$
   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi$
   (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2}$
   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n+e^n}$

5. หาค่าของ x ทั้งหมดที่ทำให้ $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$ ลู่เข้า

6. หาค่าของ x ทั้งหมดที่ทำให้ $\sum_{n=0}^{\infty} -3(\frac{x-1}{2})^n$ ลู่เข้า

7. จงหาค่าของ r ที่ทำให้อนุกรม

$$1 + 2r + r^2 + 2r^3 + r^4 + 2r^5 + \cdots$$

ลู่เข้า และหาค่าของอนุกรม

5 การทดสอบอินทิกรัล

ในบทนี้จะแนะนำเครื่องมือในการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์

ทฤษฎีบท 5.1 (Integral test)**.** ให้ a_n เป็นลำดับบวก และ $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่มีสมบัติต่อไปนี้

1. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และเป็นฟังก์ชันไม่เพิ่ม
2. $f(n) = a_n$ สำหรับทุก $n = 1, 2, \ldots$
3. $f(x) > 0$ สำหรับทุก $x \in [1, \infty)$

แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้าก็ต่อเมื่อ $\int_1^{\infty} f(x)dx$ ลู่เข้า

บทพิสูจน์อยู่ในแบบฝึกหัด

ตัวอย่าง 12. ตรวจสอบการลู่เข้าของอนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots$$

วิธีทำ. เราจะใช้การทดสอบอินทิกรัล ให้ $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ สำหรับ $x \geq 1$ และ $a_n = \frac{1}{n^2},\ n = 1, 2, 3, \ldots$

- f ต่อเนื่องทุกจุด $x \geq 1$
- ตรวจสอบความเป็นฟังก์ชันไม่เพิ่มของ f

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\,(\frac{1}{x^2}) \\ &= \frac{-2}{x^3} < 0 \text{ ทุก } x \geq 1 \end{aligned}$$

  ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่ม

- $f(n) = a_n$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$
- $f(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ สำหรับทุก ๆ $x \geq 1$

ดังนั้นเราใช้การทดสอบอินทิกรัลกับฟังก์ชัน f ได้

$$\begin{aligned}\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{r\to\infty}\int_1^r f(x)dx &= \lim_{r\to\infty}\int_1^r \frac{1}{x^2}\,dx \\ &= \lim_{r\to\infty}\left[\frac{-1}{x}\right]_1^r \\ &= \lim_{r\to\infty}\left(\frac{-1}{r}-\frac{-1}{1}\right) \\ &= 1\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\int_1^\infty f(x)\,dx$ ลู่เข้า ดังนั้นอนุกรม $\sum_{n=1}^\infty 1/n^2$ ลู่เข้าด้วย □

ทฤษฎีบท 5.2. อนุกรม p คืออนุกรมที่อยู่ในรูป

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} = 1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots$$

อนุกรมจะลู่เข้าเมื่อ $p>1$ และลู่ออกเมื่อ $p\le 1$

บทพิสูจน์. บทพิสูจน์ใช้ integral test ละไว้ให้เป็นแบบฝึกหัด □

ทฤษฎีบท 5.3. อนุกรมฮาร์มอนิก

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$$

เป็นอนุกรมลู่ออก

ผู้อ่านต้องระวังว่า ค่าของอนุกรมไม่ใช่ค่าที่ได้จากการหาปริพันธ์ ดังเช่น

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

แต่ค่าของปริพันธ์เท่ากับ 1

ทฤษฎีบท 5.4. ผลรวมอนุกรมไม่จำเป็นต้องเริ่มต้นที่ $n=1$ ให้ $\sum_{n=N}^\infty a_n$ และ $f:[N,\infty)\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่มีสมบัติต่อไปนี้

1. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และเป็นฟังก์ชันไม่เพิ่ม
2. $f(n)=a_n$ สำหรับทุก $n=N,N+1,\ldots$
3. $f(x)>0$ สำหรับทุก $x\in[N,\infty)$

แล้ว $\sum_{n=N}^\infty a_n$ ลู่เข้าก็ต่อเมื่อ $\int_N^\infty f(x)\,dx$ ลู่เข้า

แบบฝึกหัด

1. จงตรวจสอบอนุกรมต่อไปนี้

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{0.5}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+16}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1+e^n}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n\sqrt{n}}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)^3}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-n}$

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

(l) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$

2. จงหาค่า p ที่ทำให้อนุกรม $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ ลู่เข้า

   เราเรียกอนุกรมนี้ว่า อนุกรม p ลอการิทึม

3. ตรวจสอบการลู่เข้าของอนุกรม

$$\frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \cdots$$

4. เราจะเสนอบทพิสูจน์การทดสอบอินทิกรัลที่นี่ บทพิสูจน์นี้ปรากฏใน G.H. Hardy, *A Course of Pure Mathematics*

   (a) ให้ f เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องเงื่อนไขของการทดสอบอินทิกรัล และ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ จงแสดงว่า $f(n-1) \geq f(x) \geq f(n)$ เมื่อ $n-1 \leq x \leq n$

   (b) กำหนดให้

$$v_n = f(n-1) - \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx$$

   จงพิสูจน์ว่า $0 \leq v_n \leq f(n-1) - f(n)$

   (c) จงพิสูจน์ว่า $\sum v_n$ ลู่เข้า โดยแสดงให้เห็นว่า $v_2 + v_3 + \cdots + v_n \leq f(1)$

   (d) จงแสดงว่า

$$\sum_{i=1}^{n-1} v_i - \int_1^n f(x)\,dx$$

   ลู่เข้า และลิมิตไม่เกิน $f(1)$

   (e) ให้ $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$ จงแสดงว่า F เป็นฟังก์ชันเพิ่มและต่อเนื่อง

   จงแสดงว่า $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} - F(n)$ มีลิมิต และมีค่าไม่เกิน $f(1)$ เมื่อ $n \to \infty$

   (f) จงแสดงว่าผลการลู่เข้าของอนุกรมขึ้นกับการลู่เข้าของ $F(x)$

5. (Cauchy condensation test) ให้ a_n เป็นลำดับไม่เพิ่ม แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้าก็ต่อเมื่อ $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ ลู่เข้า

   จงพิสูจน์โดยใช้ 1) การทดสอบอินทิกรัลโดยแทนตัวแปรใหม่ 2) จัดกลุ่มอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

6. ใช้ Cauchy condensation test พิสูจน์ว่า $\sum 1/n$ ลู่ออก

6 การทดสอบเปรียบเทียบ

ทฤษฎีบท 6.1. ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมบวก และ s_n เป็นผลบวกย่อยลำดับที่ n ถ้า $s_n < M$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า

บทพิสูจน์. ใช้ Monotone convergence theorem กับลำดับ s_n □

เราจะใช้หลักการเปรียบเทียบอนุกรมสองชุด เพื่อสรุปการลู่เข้า

ทฤษฎีบท 6.2 (Comparison test)**.** ให้ a_n, b_n เป็นลำดับบวก และ $a_n \leq b_n$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$

- ถ้า $\sum b_n$ ลู่เข้า แล้ว $\sum a_n$ ลู่เข้าด้วย โดยที่ค่าของอนุกรมน้อยกว่าหรือเท่ากับ $\sum b_n$
- ถ้า $\sum a_n$ ลู่ออก แล้ว $\sum b_n$ ลู่ออกด้วย

ตัวอย่าง 13. จงตรวจสอบการลู่เข้าของ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{5n-1}$

วิธีทำ. เราจะเปรียบเทียบอนุกรมนี้กับอนุกรมฮาร์มอนิก

$$0 < 5n - 1 < 5n$$
$$\frac{1}{5n-1} > \frac{1}{5n}$$

สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ลู่ออก ดังนั้นอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{5n-1}$ ลู่ออก □

ตัวอย่าง 14. จงตรวจสอบการลู่เข้าของ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$

วิธีทำ. เราจะเปรียบเทียบอนุกรมนี้กับอนุกรมเรขาคณิต

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots = 1 + \frac{1}{1 - 1/2} = 3$$

จะเห็นว่าแต่ละพจน์ของอนุกรมตัวแรก น้อยกว่าพจน์ของอนุกรมตัวที่สอง และอนุกรมที่สองลู่เข้า ดังนั้นอนุกรมแรกลู่เข้า □

ต่อไปเป็นการทดสอบเปรียบเทียบอีกแบบหนึ่ง

ทฤษฎีบท 6.3 (Limit comparison test). ให้ a_n, b_n เป็นลำดับบวก

- ถ้า $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$ แล้วอนุกรม $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ ลู่เข้าหรือลู่ออกพร้อมกัน
- ถ้า $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ และ $\sum b_n$ ลู่เข้า แล้วอนุกรม $\sum a_n$ ลู่เข้า
- ถ้า $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ และ $\sum b_n$ ลู่ออก แล้วอนุกรม $\sum a_n$ ลู่ออก

ตัวอย่าง 15. จงตรวจสอบอนุกรม $\sum 1/(2^n - 1)$

วิธีทำ. ให้ $a_n = 1/(2^n - 1)$ สังเกตว่า a_n คล้ายกับลำดับ $b_n = 1/(2^n)$ จึงกำหนด b_n ดังกล่าว ตรวจสอบเงื่อนไข พบว่าทั้ง a_n และ b_n เป็นลำดับบวก

พิจารณา

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(2^n-1)}{1/(2^n)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{2^n}} \\ &= 1\end{aligned}$$

จาก b_n ลู่เข้า โดยการเปรียบเทียบลิมิต a_n ลู่เข้าด้วย □

แบบฝึกหัด

1. ตรวจสอบการลู่เข้าของอนุกรม

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 30}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n^4 + 2}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{3/2}}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n^2+3}}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 4^n}$

(f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n^3 - n^2 + 4}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3 + 4^n}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{n-1} + 1}$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - n}{n \cdot n^2}$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \ln n}$

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1}$

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{5n - 1}$

(n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1}$

(o) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^3}$

(p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{\sqrt{n}2^n}$

(q) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$

(r) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n - n}$

(s) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2n^2+4n+1}}{n^4+9}$

(t) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n^3+7}}{n^4 \sin^2(n)}$

(u) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{\sqrt{n^3+n+4}}$

2. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $\sum_{n=1} a_n$ เป็นอนุกรมบวกที่ลู่เข้า แล้ว $\sum_{n=1} a_n/n$ ลู่เข้าด้วย

3. จงแสดงว่า ถ้า $\sum a_n$ ลู่เข้า แล้ว $\sum a_n^2$ ลู่เข้าด้วย

4. ให้ $a_n > 0$ และ $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = 0$ จงแสดงว่า $\sum a_n$ ลู่เข้า

5. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 6.2

6. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 6.3

7 การทดสอบอัตราส่วน

วิธีนี้เป็นการทดสอบลิมิตของอัตราส่วนในอนุกรมเดียว จึงสะดวกกว่า comparison test ที่จะต้องหาอนุกรมมาเปรียบเทียบ

ทฤษฎีบท 7.1 (Ratio test)**.** ให้ a_n เป็นลำดับบวก และ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L \in \mathbb{R}$

1. ถ้า $L < 1$ แล้ว $\sum a_n$ ลู่เข้า
2. ถ้า $L > 1$ หรือมีค่าเป็นอนันต์ แล้ว $\sum a_n$ ลู่ออก
3. ถ้า $L = 1$ สรุปไม่ได้

ตัวอย่าง 16. จงตรวจสอบอนุกรมต่อไปนี้

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5}{3^n}$$

วิธีทำ. พิจารณา

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2^{n+1}+5)/(3^{n+1})}{(2^n+5)/(3^n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{2+5/2^n}{1+5/2^n} \to \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{3} < 1$$

ดังนั้นอนุกรมนี้ลู่เข้า □

ทฤษฎีบท 7.2 (Root test)**.** ให้ $a_n \geq 0$ เป็นลำดับ และกำหนดให้

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

- อนุกรม $\sum a_n$ ลู่เข้าเมื่อ $L < 1$
- ลู่ออกเมื่อ $L > 1$
- ถ้า $L = 1$ สรุปไม่ได้

การทดสอบนี้มีอีกชื่อว่าการทดสอบโคชี

ตัวอย่าง 17. จงแสดงว่าอนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

เป็นอนุกรมลู่เข้า

วิธีทำ. พิจารณา

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2} = \frac{1^2}{2} < 1$$

โดยใช้ผลว่า $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

โดยการทดสอบ root test อนุกรมนี้ลู่เข้า □

แบบฝึกหัด

1. จงตรวจสอบอนุกรมต่อไปนี้

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n!}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{3^n}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n \cdot 3^n}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(n+2)!}{n!3^{2n}}$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(2n+3)^n}$

(k) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{\ln n}$

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(3n)^n}$

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln\left(e^2 + \frac{1}{n}\right)\right)^{n+1}$

(n) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1+n}}$

(o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\sqrt{2}}}{2^n}$

(p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{3!n!3^n}$

(q) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!}$

(r) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} \cdot n^3$

8 อนุกรมสลับ

บทนิยาม 8.1. อนุกรมสลับคืออนุกรมที่มีพจน์เป็นบวกและลบสลับกัน

ตัวอย่าง 18. อนุกรม

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

เป็นอนุกรมสลับ

เรามีวิธีตรวจสอบการลู่เข้าของอนุกรมสลับ

ทฤษฎีบท 8.1. ให้ a_n เป็นพจน์ที่เกิดจากอนุกรมสลับ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ ที่ $a_n > 0$
ถ้า a_n เป็นลำดับไม่เพิ่ม และ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ แล้วอนุกรมสลับ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ ลู่เข้า

ตัวอย่าง 19. พิสูจน์ว่าอนุกรม

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

ลู่เข้า

วิธีทำ. พิจารณา

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

ให้ $a_n = 1/n$

ตรวจสอบความเป็นลำดับไม่เพิ่มของ a_n จาก $a_n = 1/n$ จะได้ $a_{n+1} = 1/(n+1)$ และจะได้ว่า

$$n + 1 > n$$
$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n$$

บ่งว่า a_n เป็นลำดับไม่เพิ่ม

เพราะว่า a_n เป็นลำดับไม่เพิ่ม และ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ดังนั้นอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

□

ถ้าเราสนใจตัวอนุกรมที่เป็นบวก เหมือนในตัวอย่างที่เราสนใจ a_n ที่มีค่าบวกและได้จากอนุกรมเดิม เราสามารถใช้การทดสอบต่าง ๆ ก่อนหน้านี้ได้ โดยใช้ทฤษฎีบทที่จะกล่าวต่อไปเชื่อมโยงกัน

บทนิยาม 8.2. อนุกรม $\sum a_n$ ลู่เข้าสัมบูรณ์ (absolutely convergent) ก็ต่อเมื่ออนุกรม $\sum |a_n|$ ที่เกิดจากการเปลี่ยนอนุกรมให้เป็นค่าบวก เป็นอนุกรมลู่เข้า

บทนิยาม 8.3. เรียกอนุกรมที่ลู่เข้า แต่ไม่ลู่เข้าสัมบูรณ์ว่า อนุกรมลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข (conditionally convergent)

ตัวอย่าง 20. อนุกรม

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \cdots$$

เป็นอนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์

ทฤษฎีบทที่เชื่อมโยงระหว่างการลู่เข้าทั้งสองประเภทคือ

ทฤษฎีบท 8.2. ถ้า $\sum |a_n|$ ลู่เข้า แล้ว $\sum a_n$ ลู่เข้า
อนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์จะเป็นอนุกรมลู่เข้า

ดังนั้นเราสามารถพิสูจน์การลู่เข้าของอนุกรมได้ โดยสนใจว่ามันลู่เข้าสัมบูรณ์หรือไม่

ตัวอย่าง 21. จงแสดงว่า

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$$

เป็นอนุกรมลู่เข้า

วิธีทำ. สังเกตว่าอนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\cdots$$

เป็นอนุกรมลู่เข้า (อนุกรม p) ดังนั้นอนุกรมแรกลู่เข้าสัมบูรณ์ สรุปได้ว่าอนุกรมแรกเป็นอนุกรมลู่เข้า □

แบบฝึกหัด

1. จงตรวจสอบอนุกรมต่อไปนี้

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n4^n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{10^n}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1+n}{n^2}$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n!}{2^n}$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n!}$

(l) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n\sqrt{n}}$

(m) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\ln n}$

(n) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$

(o) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\tan^{-1}n}{n^2+1}$

(p) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n)!}{n2^n n!}$

(q) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{(2n)!}$

(r) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\ln\ln(n+2)}$

9 อนุกรมกำลัง

บทนิยาม 9.1. อนุกรมกำลังรอบจุด $x=a$ คืออนุกรมในรูป

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\cdots$$

โดยที่ x เป็นตัวแปร และ $a,c_1,c_2,\ldots$ เป็นค่าคงที่

ตัวอย่าง 22. อนุกรม $1 + x + x^2 + \cdots$ เป็นอนุกรมกำลัง สังเกตว่ามันคืออนุกรมเรขาคณิตด้วย

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

เราสนใจค่า x ที่ทำให้อนุกรมกำลังลู่เข้า ซึ่งใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้ ยืนยันว่า อนุกรมกำลังลู่เข้าเป็นช่วง

ทฤษฎีบท 9.1. ให้อนุกรมกำลัง $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ ลู่เข้าที่จุด $x = c \neq 0$ แล้วอนุกรมกำลังนี้ลู่เข้าสัมบูรณ์ทุกค่า $|x| < |c|$

และถ้าลู่ออกเมื่อ $x = d$ อนุกรมจะลู่ออกทุกค่า $|x| > |d|$

เราจะยกตัวอย่างการตรวจสอบช่วงการลู่เข้า

ตัวอย่าง 23. หาค่า x ที่ทำให้อนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้า

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

วิธีทำ. จะใช้ ratio test กับอนุกรมกำลัง โดยที่สนใจค่าสัมบูรณ์

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n} \right| = \frac{n}{n+1}|x|$$

เมื่อ $n \to \infty$ อนุกรมจะลู่เข้าตามเงื่อนไขของ ratio test ก็ต่อเมื่อ $\frac{n}{n+1}|x| < 1$ นั่นคือ $|x| < 1$ อนุกรมจะลู่เข้าสัมบูรณ์

ถ้า $|x| > 1$ อนุกรมจะลู่ออกตาม ratio test

สำหรับเมื่อ $x = 1, -1$ แยกพิจารณา พบว่า

$$\text{เมื่อ } x = 1; \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1^n}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots \quad \text{เป็นอนุกรมสลับที่ลู่เข้า}$$

$$\text{เมื่อ } x = -1; \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-1)^n}{n} = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots \quad \text{เป็นอนุกรมฮาร์มอนิกจึงลู่ออก}$$

เป็นอนุกรมฮาร์มอนิกจึงลู่ออก

ค่าของ x ที่ลู่เข้าทั้งหมดคือ $x \in (-1, 1]$ □

จากตัวอย่างเราสามารถให้นิยามผลสำคัญได้

บทนิยาม 9.2. จำนวนจริง R ที่ทำให้อนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์ทุกค่า x $|x - a| < R$ แต่ลู่ออกทุกค่า x ที่ $|x - a| > R$ เรียกค่า R ว่ารัศมีการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง

ถ้าลู่เข้าทุก $x \in \mathbb{R}$ กำหนดให้ $R = \infty$

ถ้าลู่เข้าเพียงค่าเดียว แล้ว $R = 0$

บทนิยาม 9.3. เซตของค่า x ที่ทำให้อนุกรมกำลังลู่เข้าเรียกว่า ช่วงของการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง

ตัวอย่าง 24. จากตัวอย่าง 23 มีรัศมีการลู่เข้าคือ $R = 1$ และช่วงของการลู่เข้าคือ $(-1, 1]$

ทฤษฎีบท 9.2. ให้อนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ลู่เข้าสัมบูรณ์ทุกค่า $|x| < R$ แล้ว $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (f(x))^n$ ลู่เข้าสัมบูรณ์ทุกค่า $|f(x)| < R$ ด้วย เมื่อ f ต่อเนื่องตลอดช่วง $|f(x)| < R$

ประโยชน์ของอนุกรมกำลังคือ เราสามารถหาอนุพันธ์หรือปริพันธ์ไปทีละพจน์ได้เหมือนพหุนาม

ทฤษฎีบท 9.3. ให้ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนรัศมีการลู่เข้า $|x - a| < R$ เมื่อ $R > 0$

แล้ว f จะมีอนุพันธ์ทุกอันดับในช่วงดังกล่าว และจะมีค่าเท่ากับการหาปริพันธ์ทีละพจน์ กล่าวคือ

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$$

เป็นต้น และอนุกรมปริพันธ์เหล่านี้ลู่เข้าสัมบูรณ์ทุกค่า x ในช่วงเดิม

ทฤษฎีบท 9.4. ให้ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนรัศมีการลู่เข้า $|x - a| < R$ เมื่อ $R > 0$

แล้ว อนุกรมกำลัง

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

ลู่เข้าด้วย และยังได้อีกว่า

$$\int f(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C$$

แบบฝึกหัด

1. จงหาช่วงและรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{2n-1}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n}$

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}$

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}}$

(g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n x^{2n}}{n}$ (i) $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)x^n$ (k) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(\ln n)^2}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+1)^{n+1}}{2n+2}$ (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}{n^2 \cdot 2^n} x^{n+1}$

2. หาผลรวมในรูปฟังก์ชันของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$ (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{2}\right)^n$ (e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{9^n}$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - 1\right)^n$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} (e^x - 4)^n$ (f) $\sum_{n=0}^{\infty} (\ln x)^n$

3. พิจารณาอนุกรม

$$1 - \frac{1}{2}(x-4) + \frac{1}{4}(x-4)^2 - \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-4)^n + \cdots$$

อนุกรมลู่เข้าเมื่อใด มีผลรวมอนุกรมเป็นฟังก์ชันใด ฟังก์ชันใหม่ที่เกิดจากการหาอนุพันธ์ของอนุกรมนี้คืออะไร

4. จงหาอนุกรมกำลังสำหรับ $\ln(x+2)$

5. จงแสดงว่า ถ้าอนุกรมกำลังสองอนุกรมเท่ากันในช่วงเดียวกัน และต่างลู่เข้า แล้วสัมประสิทธิ์หน้าแต่ละพจน์จะต้องเท่ากัน

10 อนุกรมเทย์เลอร์และแมคลอริน

บทนี้ได้จากความพยายามหาอนุกรมกำลังให้กับฟังก์ชัน f ใด ๆ

บทนิยาม 10.1. ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับบนช่วง a เป็นจุดภายใน แล้วอนุกรมเทย์เลอร์จากฟังก์ชัน f รอบจุด $x = a$ คืออนุกรม

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)(a)}}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

อนุกรมแมคลอรินคืออนุกรมเทย์เลอร์เมื่อ $a = 0$

ตัวอย่าง 25. จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(x) = 1/x$ รอบจุด $x = 3$ และหาช่วงที่ทำให้อนุกรมนี้ลู่เข้า $1/x$

วิธีทำ. เราต้องหาอนุพันธ์ลำดับใด ๆ ของ f เสียก่อน

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} \\ f'(x) &= -\frac{1}{x^2} \\ f''(x) &= \frac{2}{x^3} \\ f'''(x) &= -\frac{3\cdot 2}{x^4} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} \end{aligned}$$

แทนค่า $x = 3$

$$f^{(n)}(3) = (-1)^n \frac{n!}{3^{n+1}}$$

มีพจน์เริ่มต้น คือ $f(3) = 1/3,\ f'(3) = -1/9,\ f''(3) = 2/27, \ldots$

ดังนั้นอนุกรมเทย์เลอร์ของ f คือ

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k!}{3^{k+1}} \cdot \frac{1}{k!}(x-3)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x-3)^k}{3^{k+1}}$$

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a = 1/3$ และ $r = -(x-3)/3$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x-3)^k}{3^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{(-1)^k (x-3)^k}{3^k} = \frac{1/3}{1-(-1)(x-3)/3} = \frac{1}{x}$$

จะลู่เข้าเมื่อ $|r| = |-(x-3)/3| < 1$

นั่นคือ $|x-3| < 3$ หรือ $0 < x < 6$ □

จะเห็นว่าเป็นการยุ่งยากที่จะพิสูจน์โดยตรงว่าเมื่อไรอนุกรมเทย์เลอร์จะลู่เข้าฟังก์ชัน เรามีทฤษฎีบทเพื่อช่วยแก้ปัญหาดังกล่าว

ทฤษฎีบท 10.1 (ทฤษฎีบทเทย์เลอร์)**.** ให้ f และอนุพันธ์ลำดับที่ $1,\ 2,\ 3,\ \ldots, n$ ของ f หาค่าได้บนช่วงปิด $[a,b]$ และ f หาอนุพันธ์อันดับที่ $n+1$ บนช่วงเปิด (a,b) แล้วจะมี $c \in (a,b)$ ที่ทำให้

$$\begin{aligned} f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots \\ + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 10.2 (สูตรของเทย์เลอร์ (Taylor's formula)). ให้ f มีอนุพันธ์ทุกลำดับบนช่วงเปิด I ที่ $a \in I$ แล้วสำหรับแต่ละจำนวนนับ n และ $x \in I$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

เมื่อ

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

ดังนั้น $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ เรียก $R_n(x)$ ว่าเศษเหลืออันดับที่ n (remainder of order n) หรือ error term ของการประมาณ f ด้วย $P_n(x)$ บนช่วง I

ตัวอย่าง 26. จงแสดงว่าอนุกรมเทย์เลอร์สร้างโดย $f(x) = e^x$ ที่จุด $x = 0$ ลู่เข้า f ทุกค่า x

วิธีทำ. ฟังก์ชัน f หาอนุพันธ์ได้ทุกค่า x บนช่วง $(-\infty, \infty)$ เราใช้สูตรของเทย์เลอร์กับ $a = 0$ ได้ว่า

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

และ

$$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$$

สำหรับบาง c ที่มีค่าระหว่าง 0 และ x

ถ้า $x \le 0$ แล้ว

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1} \right| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

ในขณะที่ ถ้า $x > 0$ แล้ว

$$|R_n(x)| \le e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

จะได้ว่า $R_n(x) \to 0$ เมื่อ $n \to \infty$ ดังนั้นอนุกรมลู่เข้าสู่ e^x สำหรับทุกค่า x $\square$

วิธีการประมาณค่านี้มีทฤษฎีบทเกี่ยวข้องที่สำคัญและควรทราบ

ทฤษฎีบท 10.3 (Remainder estimation theorem). ถ้ามีค่าคงตัว M ที่ทำให้ $|f^{(n+1)}(t)| \le M$ เมื่อ $t \in [x, a]$

แล้ว

$$|R_n(x)| \le M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

หาก f สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทเทย์เลอร์ แล้วอนุกรมเทย์เลอร์ของ f จะลู่เข้า f

แบบฝึกหัด

1. จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

(a) $f(x) = e^{2x},\ a = 0$

(b) $f(x) = \ln x,\ a = 1$

(c) $f(x) = \sin x,\ a = \pi/4$

(d) $f(x) = \sin x,\ a = 0$

(e) $f(x) = 1/(x+4),\ a = 5$

(f) $f(x) = \sqrt{1+x},\ a = 0$

(g) $f(x) = \ln(1-x),\ a = 0$

(h) $f(x) = 1/x,\ a = 4$

2. หาอนุกรมแมคลอรินของฟังก์ชันต่อไปนี้

   (a) $f(x) = xe^x$

   (b) $f(x) = \sin 2x$

   (c) $f(x) = 7\cos(-x)$

   (d) $f(x) = x^2/(x+1)$

3. อนุกรมแมคลอรินของฟังก์ชัน $f(x) = x\sin^2 x$ ลู่เข้าสัมบูรณ์เมื่อใด

4. อนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt{1+x}$ รอบจุด $a = 3$ ลู่เข้าสัมบูรณ์เมื่อใด

5. จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน $f(x) = \sin x$
   ใช้ผลที่ได้หาอนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(x) = \sin(\pi x/2)$ พร้อมระบุช่วงของการลู่เข้า

6. จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน $f(x) = \ln x$
   ใช้ผลที่ได้หาอนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(x) = \ln(1+x^2)$ พร้อมระบุช่วงของการลู่เข้า

7. ประมาณค่า $\cos(\pi/2 + 0.01)$ ด้วยพหุนามเทย์เลอร์อันดับ 3 รอบจุด $x = \pi/2$

8. ประมาณค่า $\sin(\pi/4 + 0.01)$ ให้ผิดพลาดไม่เกิน 0.00001

9. ประมาณค่า $e^{0.012}$ ด้วยพหุนามเทย์เลอร์อันดับ 4 รอบจุด $x = 0$

10. การประมาณค่า $\sin x$ ด้วย x โดยต้องการค่าผิดพลาดไม่เกิน 10^{-2} เหมาะสมสำหรับค่า x ในช่วงใด