ความสมมูลของสัจพจน์การเลือกและสัจพจน์ที่เกี่ยวข้อง

เปมทัต แท่นสุนทร

เมษายน 2022

สารบาญ

1 บทนำ

ในเอกสารฉบับนี้ เราจะพิสูจน์ว่าข้อความ "การเลือก" ต่อไปนี้สมมูลกันในระบบทฤษฎีเซต ZF

สัจพจน์ 1 (Axiom of Choice, Formulation A)**.** สำหรับทุกเซตที่ไม่ว่าง จะมีฟังก์ชันการเลือก

ในที่นี้ *ฟังก์ชันการเลือกสำหรับเซต* $A \neq \emptyset$ คือฟังก์ชัน $f\colon \mathcal{P}^*(A) \to A$ เมื่อ $\mathcal{P}^*(A) = \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ คือเซตของสับเซตของ A ทั้งหมดที่ไม่ใช่เซตว่าง และ f สอดคล้องกับ $f(B) \in B$ สำหรับทุก $B \in \mathcal{P}^*(A)$

สัจพจน์ 2 (Axiom of Choice, Formulation B)**.** ให้ I เป็นเซตดรรชนี และ $\{A_i\}_{i \in I}$ เป็นวงศ์ของเซต โดยที่ $A_i \neq \emptyset$ สำหรับทุก $i \in I$ ถ้า $I \neq \emptyset$ แล้วผลคูณคาร์ทีเซียน $\prod_{i \in I} A_i$ ไม่เป็นเซตว่าง

ในที่นี้เราจะกล่าวถึงอีกรูปแบบหนึ่งของสัจพจน์การเลือกที่สมมูลกับรูปแบบข้างต้นทั้งสอง รูปแบบที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้เป็นที่รู้จักมากกว่า และใช้งานบ่อยกว่ารูปแบบข้างต้นทั้งคู่

สัจพจน์ 3 (Axiom of Choice, Formulation C)**.** ให้ X เป็นวงศ์ของเซตที่สมาชิกทั้งหมดเป็นเซตไม่ว่าง แล้ว X มีฟังก์ชันการเลือก (บน X)

คำว่า *ฟังก์ชันการเลือกบน* X ในที่นี้คือฟังก์ชัน $f\colon X \to \bigcup X$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่ว่า $f(A) \in A$ สำหรับทุก $A \in X$

จะเห็นว่าข้อความในสัจพจน์รูปแบบ C นำไปสู่ข้อความในสัจพจน์รูปแบบ A โดยง่าย เพื่อป้องกันความสับสนระหว่างความหมายของฟังก์ชันการเลือกทั้งสองที่นิยามบนโดเมนต่างกัน เราจะพิสูจน์ว่า (A) $\Leftrightarrow$ (B) และ (B) $\Leftrightarrow$ (C) ดังนี้แทน และเมื่อเราพิสูจน์ความสมมูลของสัจพจน์การเลือกทั้งสามรูปแบบ เราจะใช้สัจพจน์การเลือกในรูปแบบ (C) เป็นหลัก และเรียกมันว่า *สัจพจน์การเลือก* และเขียนแทนด้วย (AC)

นอกจากรูปแบบของสัจพจน์การเลือกแล้ว ยังมีข้อความแบบอื่น ๆ อีกมากที่สมมูลกับสัจพจน์การเลือก ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างข้อความที่เราจะพิสูจน์ว่าสมมูลกันกับสัจพจน์การเลือกในเอกสารฉบับนี้

สัจพจน์ 4 (Zermelo's postulate (ZP))**.** สัจพจน์มูลบทของแซร์เมโล: ให้ $\{A_i\}_{i \in I}$ เป็นวงศ์ของเซตไม่ว่างที่สมาชิกแต่ละคู่ไม่มีส่วนร่วมกัน นั่นคือ ถ้า $i \neq j$ แล้ว $A_i \cap A_j = \emptyset$ แล้วจะมีเซต $B \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ โดยที่สำหรับทุก $i \in I$ จะได้ว่า $B \cap A_i$ มีสมาชิกเพียงตัวเดียว

เพื่อความบริบูรณ์เราจะพิสูจน์ความสมมูลของสัจพจน์ต่อไปนี้ด้วย ซึ่งเป็นที่รู้จักกันดีว่าสมมูลกับสัจพจน์การเลือก

สัจพจน์ 5 (Zorn's lemma (ZL))**.** บทตั้งของซอร์น: ถ้า $(A, \leq)$ เป็นเซตอันดับบางส่วน ถ้าทุกลูกโซ่ใน A มีขอบเขตบนน้อยสุด แล้ว A จะมีสมาชิกใหญ่ที่สุด

สัจพจน์ 6 (Hausdorff maximal principle (HM))**.** หลักการใหญ่สุดของเฮาส์ดอร์ฟ: ทุกเซตอันดับบางส่วนมีลูกโซ่ที่ใหญ่ที่สุด

สัจพจน์ 7 (Well-ordering principle (WOP))**.** หลักการจัดอันดับดี: ทุกเซตสามารถจัดอันดับดีได้

2 ความสมมูลของสัจพจน์การเลือกทั้งสาม

ก่อนอื่นเราให้นิยามผลคูณคาร์ทีเซียนสำหรับเซตใด ๆ เสียก่อน

บทนิยาม 2.1. *ผลคูณคาร์ทีเซียนสำหรับวงศ์ของเซต* $\{A_i\}_{i\in I}$ คือเซตของฟังก์ชัน $f\colon I\to\bigcup_{i\in I}A_i$ ทั้งหมดที่ส่ง i ไปยังสมาชิกภายในเซต A_i สำหรับแต่ละ i นั้น กล่าวคือ

$$\prod_{i\in I}A_i=\left\{f\colon I\to\bigcup_{i\in I}A_i\colon(\forall i\in I).f(i)\in A_i\right\}$$

สำหรับเซต $I=\{1,2,\ldots,n\}$ ผลคูณคาร์ทีเซียน $\prod_{i\in I}A_i$ ยังไม่ใช่เซตของ n-สิ่งอันดับโดยตรง แต่เราสามารถมอง $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ ว่าเป็นฟังก์ชันที่ส่งจำนวนนับ $1,2,\ldots,n$ ไปยังของที่อยู่ตำแหน่งนั้นใน n-สิ่งอันดับได้ นั่นคือ $f(i)=a_i$ สำหรับ $i=1,2,\ldots,n$ การมองดังกล่าวเป็นธรรมชาติและให้การส่ง 1-1 ทั่วถึงระหว่าง ผลคูณคาร์ทีเซียน $\prod_{i\in I}A_i$ และเซตของ n-สิ่งอันดับ $A_1\times A_2\times A_n$ ในทางปฏิบัติเราถือว่าวัตถุทั้งสองเป็นอย่างเดียวกัน (เรียกว่ามี natural identification ระหว่างเซตทั้งสอง)

จากข้างต้นเราจะได้ความสมมูลด้านล่างโดยทันที

ทฤษฎีบท 2.1 ((B) $\Leftrightarrow$ (C))**.** สัจพจน์การเลือกในรูปแบบ B และรูปแบบ C สมมูลกัน

พิสูจน์. [(B) $\Rightarrow$ (C)] ให้ X เป็นวงศ์ของเซตไม่ว่าง เราสามารถให้ดรรชนีกับ X ด้วยตัวมันเองได้ จะได้ว่า

$$X=\{X_i\}_{i\in X}$$

โดยที่ $X_i=i$ สำหรับทุก $i\in X$ นั่นเอง

จากสัจพจน์การเลือกในรูปแบบ B จะได้ว่าผลคูณคาร์ทีเซียน $\prod_{i\in X}X_i$ เป็นเซตไม่ว่างด้วย แต่จากนิยามเราทราบว่าเซตดังกล่าวมีสมาชิกเป็นฟังก์ชัน $f\colon X\to\bigcup_{i\in I}X_i$ ที่ซึ่ง $f(i)=f(X_i)\in X_i$ สำหรับทุก $i\in X$ ดังนั้นผลคูณคาร์ทีเซียนมีสมาชิกเป็นฟังก์ชันการเลือกบน X

เนื่องจากผลคูณคาร์ทีเซียน $\prod_{i\in X}X_i$ เป็นเซตไม่ว่าง ดังนั้นจะมีฟังก์ชันการเลือกบน X ที่เป็นสมาชิกของมัน

[(B) $\Rightarrow$ (C)] จากข้อสังเกตข้างต้น เห็นได้ชัดว่า ถ้ามีฟังก์ชันการเลือกบน $\{X_i\}_{i\in I}$ แล้วผลคูณคาร์ทีเซียน $\prod_{i\in I}X_i$ ต้องเป็นเซตไม่ว่าง □

ต่อไปเราพิสูจน์ว่า (A) $\Leftrightarrow$ (B)

ทฤษฎีบท 2.2 ((A) $\Leftrightarrow$ (B))**.** สัจพจน์การเลือกในรูปแบบ A และรูปแบบ B สมมูลกัน

พิสูจน์. [(A) $\Rightarrow$ (B)] ให้ $\{A_i\}_{i\in I}$ เป็นวงศ์ของเซตไม่ว่าง แล้วกำหนดให้ $A=\bigcup_{i\in I}A_i$

จากสัจพจน์การเลือกในรูปแบบ A จะได้ว่ามีฟังก์ชันการเลือก $f\colon\mathcal{P}^*(A)\to A$ ที่ซึ่ง $f(B)\in B$ สำหรับแต่ละ $B\in\mathcal{P}^*(A)$ ซึ่งสมมูลกับเงื่อนไขที่ว่า $B\subseteq A$ และ B ไม่เป็นเซตว่าง

เราจะได้ทันทีว่า $f(A_i)\in A_i$ สำหรับแต่ละ $i\in I$ เพราะ $A_i\subseteq A$ ไม่เป็นเซตว่างสำหรับทุก $i\in I$ ฉะนั้นหากนิยามฟังก์ชันการฉายกลับ $l\colon I\to\{A_i\}_{i\in I}$ โดยที่ $l(i)=A_i$ สำหรับทุก $i\in I$ แล้วจะได้ว่า $f\circ l\colon I\to\bigcup_{i\in I}A_i$ เป็นฟังก์ชันที่ซึ่ง

$$f\circ l(i)=f(l(i))=f(A_i)\in A_i$$

สำหรับทุก $i\in I$ นั่นคือ $f\circ l$ เป็นฟังก์ชันการเลือกบน $\{A_i\}_{i\in I}$ (ในความหมายของรูปแบบ C) และ $f\circ l\in\prod_{i\in I}A_i$ ดังนั้นผลคูณคาร์ทีเซียนดังกล่าวเป็นเซตไม่ว่าง

[(A) $\Leftarrow$ (B)] ให้ A เป็นเซตไม่ว่าง ดังนั้น $\mathcal{P}^*(A)$ เป็นวงศ์ของเซตไม่ว่าง (เพราะมี $A \neq \emptyset$ เป็นสมาชิก) เราให้ $\mathcal{P}^*(A)$ ดรรชนีด้วยตัวมันเอง นั่นคือ

$$\mathcal{P}^*(A) = \{A_i\}_{i \in \mathcal{P}^*(A)}$$

โดยที่ $A_i = i$ สำหรับแต่ละ $i \in \mathcal{P}^*(A)$ ดังนั้นผลคูณคาร์ทีเซียน $\prod_{i \in \mathcal{P}^*(A)} A_i$ ไม่เป็นเซตว่าง และจะได้ว่ามีฟังก์ชัน $f \colon \mathcal{P}^*(A) \to \bigcup_{i \in \mathcal{P}^*(A)} i$ ที่ซึ่ง $f(i) \in A_i$ สำหรับแต่ละ $i \in \mathcal{P}^*(A)$

แต่จากการให้นิยามข้างต้นเราจะได้ว่า $\bigcup_{i \in \mathcal{P}^*(A)} i = A$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันการเลือกสำหรับเซต A $\square$

3 ความสมมูลระหว่าง AC และ ZP

เพื่อความสะดวกเราเขียนสัจพจน์มูลบทของแซร์เมโล (ZP) อีกครั้ง

สัจพจน์ 4 (Zermelo's postulate (ZP))**.** สัจพจน์มูลบทของแซร์เมโล: ให้ $\{A_i\}_{i \in I}$ เป็นวงศ์ของเซตไม่ว่างที่สมาชิกแต่ละคู่ไม่มีส่วนร่วมกัน นั่นคือ ถ้า $i \neq j$ แล้ว $A_i \cap A_j = \emptyset$ แล้วจะมีเซต $B \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ โดยที่สำหรับทุก $i \in I$ จะได้ว่า $B \cap A_i$ มีสมาชิกเพียงตัวเดียว

หลักการ ZP เสนอโดย Ernst Zermelo ในปี 1908 ซึ่งเขามองว่าเป็นรูปแบบหนึ่งของสัจพจน์การเลือก ในภาษาของ Zermelo เรียกเซตที่มีสมบัติอย่างเซต B ใน ZP ว่า *transversal* ดังนั้น ZP จึงเป็นข้อความที่ว่าทุกวงศ์ของเซตไม่ว่างที่สมาชิกแต่ละคู่ไม่มีส่วนร่วมกันจะมีเซต transversal เสมอนั่นเอง

ทฤษฎีบท 3.1. AC สมมูลกับ ZP

พิสูจน์. [(AC) $\Rightarrow$ (ZP)] ให้ $\{A_i\}_{i \in I}$ เป็นวงศ์ของเซตไม่ว่างที่สมาชิกแต่ละคู่ไม่มีส่วนร่วมกัน ดังนั้นจะมีฟังก์ชันการเลือก $f \colon I \to \bigcup_{i \in I} A_i$ ให้ $B = f(I)$ เป็นภาพของ I ภายใต้การส่ง f

จึงเหลือเพียงแต่พิสูจน์ว่า $B \cap A_i$ มีสมาชิกเพียงตัวเดียวสำหรับแต่ $i \in I$ เราจะพิสูจน์ว่ามันเป็นเซตไม่ว่างแล้วจากนั้นจะพิสูจน์ว่ามันมีสมาชิกตัวเดียว

ให้ $i \in I$ ดังนั้น $f(i) \in A_i$ จากการที่ f เป็นฟังก์ชันการเลือก และเราเห็นได้ว่า $f(i) \in f(I) = B$ ฉะนั้น $B \cap A_i \neq \emptyset$

ต่อไป ให้ $x \in B \cap A_i$ จาก $x \in B = f(I)$ ดังนั้น $x = f(j)$ สำหรับบาง $j \in I$ และจาก f เป็นฟังก์ชันการเลือก ดังนั้น $x = f(j) \in A_j$ ด้วย

แต่ถ้า $j \neq i$ แล้ว $A_j \cap A_i = \emptyset$ ขัดแย้งกับ $x \in A_j$ และ $x \in A_i$ ดังนั้น $i = j$ แต่จาก f เป็นฟังก์ชันจะได้ว่า $x = f(i)$ นั่นคือ $B \cap A_i$ มีสมาชิกเพียงตัวเดียวคือ $f(i)$ ตามต้องการ

[(AC) $\Leftarrow$ (ZP)] ให้ X เป็นวงศ์ของเซตไม่ว่าง พิจารณาเซต

$$X' = \{\{x\} \times x \colon x \in X\}$$

ถ้า $x, y \in X$ สอดคล้องกับ $(\{x\} \times x) \cap (\{y\} \times y) \neq \emptyset$ แล้วจะได้ว่า $x = y$ หรืออีกนัยหนึ่ง หาก $x \neq y$ แล้ว $(\{x\} \times x) \cap (\{y\} \times y) = \emptyset$ ดังนั้น X' เป็นวงศ์ของเซตไม่ว่างที่ไม่มีส่วนร่วมกันทุกคู่ ดังนั้นจะมีเซต $B \subseteq \bigcup X'$ ที่ทำให้ $B \cap (\{x\} \times x)$ มีสมาชิกเพียงตัวเดียวสำหรับแต่ละ $x \in X$

นิยามฟังก์ชัน $f \colon X \to \bigcup X$ ดังนี้

$$f(x) = \text{ สมาชิกตัวท้ายของคู่อันดับหนึ่งเดียวที่ปรากฏใน } B \cap (\{x\} \times x)$$

จากการที่ $B \cap (\{x\} \times x)$ มีสมาชิกเพียงหนึ่งเดียว จะได้ว่า f นิยามดี และมีโดเมนและโคโดเมนตามที่กำหนดไว้ นอกจากนี้จะได้ว่า $f(x) \in x$ สำหรับทุก $x \in X$ นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันการเลือกตามต้องการ $\square$

สัจพจน์ AC และ ZP เสนอเป็นครั้งแรกโดย Zermelo ในปี 1904 และ 1908 ตามลำดับ เพื่อพิสูจน์หลักการจัดอันดับดี (WOP) ซึ่งเราจะพิสูจน์ต่อไปในบทความนี้

4 ความสมมูลระหว่าง ZL, HM และ AC

ในส่วนนี้เราจะพิสูจน์ความสมมูลระหว่างสัจพจน์การเลือก (AC), บทตั้งของซอร์น (ZL) และ หลักการใหญ่สุดของเฮาส์ดอร์ฟ (HM) เพื่อความสะดวกเราเขียนสัจพจน์ทั้งสองอีกครั้งที่นี่

สัจพจน์ 5 (Zorn's lemma (ZL))**.** บทตั้งของซอร์น: ถ้า $(A, \leq)$ เป็นเซตอันดับบางส่วน ถ้าทุกลูกโซ่ใน A มีขอบเขตบนน้อยสุด แล้ว A จะมีสมาชิกใหญ่ที่สุด

สัจพจน์ 6 (Hausdorff maximal principle (HM))**.** หลักการใหญ่สุดของเฮาส์ดอร์ฟ: ทุกเซตอันดับบางส่วนมีลูกโซ่ที่ใหญ่ที่สุด

ก่อนอื่นเรากล่าวถึงนิยามของลูกโซ่ (chain) เสียก่อน ซึ่งก็คือสับเซตของเซตอันดับบางส่วนที่ตัวมันเองเป็นเซตอันดับทุกส่วน ในขณะที่ลูกโซ่ใหญ่ที่สุด (maximal chain) คือลูกโซ่ C ที่มีสมบัติว่า ลูกโซ่ที่บรรจุ C เป็นสับเซตมีได้แค่ C ตัวมันเองเท่านั้น

มีหลักการที่ใกล้ชิดกับหลักการใหญ่สุดของเฮาส์ดอร์ฟซึ่งเราอาจถือว่าเป็นข้อความของ HM ได้เช่นกัน

สัจพจน์ 8 (Hausdorff maximal principle, alternative statement)**.** ทุกลูกโซ่ในเซตอันดับบางส่วนสามารถขยายไปเป็นลูกโซ่ที่ใหญ่ที่สุดและบรรจุตัวมันได้เสมอ

บทตั้ง 4.1. ข้อความ HM ทั้งสองรูปแบบสมมูลกัน

พิสูจน์. ให้ A เป็นเซตอันดับบางส่วน และ $C \subseteq A$ เป็นเซตอันดับทุกส่วน พิจารณาเซต $\mathcal{C}$ ที่กำหนดโดย

$$\mathcal{C} = \Big\{S \colon C \subseteq S \subseteq A \text{ โดยที่ } S \text{ เป็นเซตอันดับทุกส่วน}\Big\}$$

ดังนั้นจะได้ว่า $\mathcal{C}$ เป็นเซตอันดับบางส่วนภายใต้การเป็นสับเซต โดย HM จะได้ว่าเซต $\mathcal{C}$ มีลูกโซ่ P ที่ใหญ่ที่สุด เซตดังกล่าวคือลูกโซ่ที่ใหญ่ที่สุดใน A ที่บรรจุ C นั่นเอง

สำหรับอีกทิศทางหนึ่ง สังเกตว่า $\varnothing$ เป็นเซตอันดับทุกส่วนที่เป็นสับเซตของเซตอันดับบางส่วน A ใด ๆ ดังนั้นจาก HM ในอีกรูปแบบจะมีลูกโซ่ P ที่ใหญ่ที่สุดของ A ที่บรรจุ $\varnothing$ ซึ่งก็เป็นลูกโซ่ที่ใหญ่ที่สุดของ A □

เราจะใช้ HM ในรูปแบบที่สองเพื่อพิสูจน์ว่ามันสมมูลกับ ZL

ทฤษฎีบท 4.2. (ZL) $\Leftrightarrow$ (HM)

พิสูจน์. ในการพิสูจน์นี้ ให้ $(A, \leq)$ เป็นเซตอันดับบางส่วน

[(ZL) $\Rightarrow$ (HM)] ให้ $C \subseteq A$ เป็นลูกโซ่ใน A พิจารณาคอลเลคชั่น $\mathcal{C}$ ของลูกโซ่ทั้งหมดใน A ที่บรรจุ C เซตนี้เป็นเซตอันดับบางส่วนที่เรียงลำดับโดยการเป็นสับเซต

เราจะใช้ Zorn's lemma กับเซต $\mathcal{C}$ ให้ $\{C_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq \mathcal{C}$ เป็นลูกโซ่ใด ๆ พิจารณา $\bigcup_\alpha C_\alpha$ ภายใต้การเรียงอันดับเดียวกับ A เราอ้างว่า $\bigcup_\alpha C_\alpha$ จะเป็นลูกโซ่ด้วย

เพื่อพิสูจน์คำกล่าวอ้างข้างต้น ให้ x, y เป็นสมาชิกใน $\bigcup_\alpha C_\alpha$ ดังนั้น $x \in C_\alpha$ และ $y \in C_\beta$ สำหรับบาง α, β แต่เนื่องจาก $\{C_\alpha\}_{\alpha \in A}$ เป็นลูกโซ่ ดังนั้น $x, y \in \max\{C_\alpha, C_\beta\}$ และจาก C_α, C_β เป็นลูกโซ่จะได้ว่า

x, y เปรียบเทียบกันได้ นั่นคือ $\bigcup_\alpha C_\alpha$ เป็นลูกโซ่ เพราะฉะนั้น $\bigcup_\alpha C_\alpha$ เป็นสมาชิกใน $\mathcal{C}$ และเป็นขอบเขตบนของ $\{C_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ฉะนั้นจึงใช้ Zorn's lemma ได้

ดังนั้น $\mathcal{C}$ มีสมาชิกที่ใหญ่ที่สุด ซึ่งก็คือลูกโซ่ที่ใหญ่ที่สุดใน A ที่บรรจุ C ตามต้องการ

[(ZL) $\Rightarrow$ (HM)] สมมุติให้ A เป็นเซตอันดับบางส่วนที่ทุกลูกโซ่มีขอบเขตบน จาก HM ในรูปแบบแรกจะได้ว่า A มีลูกโซ่ C ที่ใหญ่ที่สุด โดยข้อสมมติฐานจะได้ว่า C มีขอบเขตบน ให้เป็น x

เราจะได้ว่า x จะเป็นสมาชิกใหญ่สุดของ A ทั้งนี้เพราะว่าถ้า $x \le y$ แล้ว $C = C \cup \{y\}$ จากการเป็นลูกโซ่ใหญ่ที่สุดของ C ดังนั้น $y \in C$ จึงได้ว่า $y \le x$ จากการที่ x เป็นขอบเขตบนของ C □

สำหรับความสัมพันธ์ระหว่าง ZL และ AC นั้นทั้งคู่สมมูลกันในระบบเซต ZF แต่ทว่าบทพิสูจน์ของ ZL หากสมมติว่า AC จริงนั้นยากกว่าทิศทางกลับกัน

ทฤษฎีบท 4.3. (ZL) $\Rightarrow$ (AC)

พิสูจน์. ให้ $\{A_i\}_{i\in I}$ เป็นวงศ์ของเซตไม่ว่างที่ดรรชนีด้วยเซต I พิจารณาเซต

$$\mathcal{F} = \left\{ f\colon J_f \to \bigcup_i A_i \colon J_f \subseteq I \text{ และ } f(j) \in A_j \text{ สำหรับทุก } j \in J_f \right\}$$

ซึ่งเป็นเซตของ*ฟังก์ชันการเลือกบางส่วน*จาก I ไปยัง $\bigcup_{i\in I} A_i$ และเรียงลำดับโดยการเป็นภาคขยายของกันและกัน หรืออีกนัยหนึ่งจะกำหนด $f \le g$ ก็ต่อเมื่อ $J_f \le J_g$ และ $g|_{J_f} = f$ เห็นได้ว่า $(\mathcal{F}, \le)$ เป็นเซตอันดับบางส่วน (เพราะ $\le$ คือ $\subseteq$ เมื่อมองฟังก์ชันต่าง ๆ เป็นเซตของคู่อันดับ) และ $\mathcal{F}$ เป็นเซตไม่ว่าง

ให้ $C = \{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ เป็นลูกโซ่ของฟังก์ชันใน $\mathcal{F}$ จะได้ว่า $F = \bigcup_\alpha f_\alpha$ เป็นฟังก์ชันด้วย ทั้งนี้เพราะว่าโดเมนและโคโดเมนของ F คือ $\bigcup_\alpha J_\alpha$ และ $\bigcup_i A_i$ ตามลำดับ และถ้า $x \in \bigcup_\alpha J_\alpha$ แล้วจะได้ว่า $x \in J_\alpha$ สำหรับบาง $\alpha \in A$ ซึ่งทำให้ $f_\alpha(x) \in A_x$ นอกจากนี้ถ้า $x \in J_\beta$ สำหรับ $\beta \in A$ แล้วจาก C เป็นลูกโซ่จะได้ว่า $f_\alpha \le f_\beta$ หรือ $f_\alpha \ge f_\beta$

ถ้า $f_\alpha \le f_\beta$ แล้วจะได้ว่า $f_\beta(x) = f_\beta|_{J_\alpha}(x) = f_\alpha(x)$ และถ้า $f_\alpha \ge f_\beta$ แล้วจะได้ว่า $f_\alpha(x) = f_\alpha|_{J_\beta}(x) = f_\beta(x)$ นั่นคือ $f_\alpha(x) = f_\beta(x)$ ทุกสมาชิกในลูกโซ่ที่ x อยู่ในโดเมนส่ง x ไปสมาชิกเดียวกัน ทำให้ F นิยามดี และจะเห็นชัดว่า F เป็นขอบเขตบนของลูกโซ่ C

ดังนั้นทุกลูกโซ่ใน $\mathcal{F}$ มีขอบเขตบน เราจะได้ว่า $\mathcal{F}$ มีสมาชิกที่ใหญ่ที่สุดให้แทนด้วย g ถ้าเราสามารถแสดงได้ว่า $J_g = I$ แล้วจะได้ g เป็นฟังก์ชันการเลือกบน $\{A_i\}_{i\in I}$ ตามต้องการ

สมมติ $J_g \ne I$ ดังนั้นมี $j \in I$ ที่ซึ่ง $j \notin J_g$

ให้ $a \in A_j$ แล้วจะได้ว่าเราสามารถขยาย g ไปเป็นฟังก์ชัน $\hat{g}$ ที่ซึ่ง $\hat{g}(x) = g(x) \in A_x$ สำหรับทุก $x \in J_g$ และ $\hat{g}(j) = a \in A_j$ จะได้ $\hat{g} \ne g$ และ $\hat{g} \ge g$ ซึ่งขัดแย้งกับการที่ g เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุด ดังนั้น $J_g = I$ เท่านั้น □

ด้านล่างเป็นการพิสูจน์ว่าถ้า AC เป็นจริงแล้ว ZL เป็นจริงด้วย บทพิสูจน์ด้านล่างปรากฏใน [nLa22]

ทฤษฎีบท 4.4. (ZL) $\Leftarrow$ (AC)

พิสูจน์. ให้ A เป็นเซตอันดับบางส่วนที่ทุกลูกโซ่มีขอบเขตบน เราจะพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้งว่า A ต้องมีสมาชิกใหญ่สุด สมมติว่าไม่ ดังนั้นทุกลูกโซ่ C ของ A จะต้องมีขอบเขตบนโดยแท้ กล่าวคือจะมี $x \in A$ ที่ $c < x$ สำหรับทุก $x \in C$ ทั้งนี้เพราะว่าถ้า y เป็นขอบเขตบนของ C แล้ว y ไม่สามารถเป็นสมาชิกใหญ่ที่สุดของ A ได้ ฉะนั้นจะมี x ที่ $y < x$ ซึ่งเป็นขอบเขตบนโดยแท้ของ C ตามต้องการ

ให้ Well(A) แทนสับเซตของ A ทั้งหมดที่จัดอันดับดีโดย $\leq$ (เห็นได้ชัดว่าสมาชิกใน Well(A) เป็นลูกโซ่) ใช้สัจพจน์การเลือกเพื่อเลือก $f(W)$ ให้เป็นขอบเขตบนโดยแท้ตัวหนึ่งของ $W \subseteq$ Well(A) จะเรียกเซต $W \in$ Well(A) ว่าเป็นเซต f-inductive ก็เมื่อสำหรับทุก $x \in W$ จะได้ว่า $x = f(\{y \in W : y < x\})$

เซต Well(A) เป็นเซตไม่ว่างเพราะมี $\varnothing$ เป็นสมาชิก ดังนั้น $f(\varnothing)$ หาได้ แล้วจะได้ว่า $\{f(\varnothing)\}$ เป็นเซต f-inductive เราสามารถใช้ f กับเซตดังกล่าวไปเรื่อง ๆ เพื่อสร้างลูกโซ่ใน A ได้ ลูกโซ่ดังกล่าวจะ "ยาวกว่า" A (สามารถพิสูจน์ได้หากใช้ transfinite induction) เราเสนอวิธีพิสูจน์อีกแบบด้วยเทคนิคด้านล่าง

ให้ $Y, Z \in$ Well(A) เป็นเซต f-inductive เราจะแสดงว่าต้องมีเซตหนึ่งเป็น*ชิ้นส่วนต้น*ของอีกเซตหนึ่ง ในความหมายที่ว่า

- L เป็นชิ้นส่วนต้นของ P ก็ต่อเมื่อ ถ้า $y, x \in P$ โดยที่ $y \leq x$ และ $x \in L$ แล้ว $y \in L$ ด้วย

ให้ I เป็นยูเนียนของสับเซตของ S ทั้งหมดที่เป็นชิ้นส่วนต้นของทั้ง Y และ Z แล้วจะได้ว่า I เป็นชิ้นส่วนต้นที่ใหญ่ที่สุดที่สอดคล้องกับเงื่อนไขดังกล่าว ถ้า I เป็นสับเซตแท้ของทั้ง Y และ Z แล้วจะมี y และ z ที่เป็นสมาชิกที่น้อยที่สุดใน $Y \setminus I$ และ $Z \setminus I$ ตามลำดับ (มีเพราะ Y, Z เป็นเซตจัดอันดับดี)

ดังนั้น $\{x \in Y : x < y\} = I = \{x' \in Z : x' < z\}$ แล้วอาศัยความเป็น f-inductive ของเซตทั้งสองจะได้ $y = f(I) = z$ แล้วเราจะสามารถขยาย I ไปเป็นชิ้นส่วนต้น $I \cup \{y\} = I \cup \{z\}$ ได้ แต่จะขัดแย้งกับความใหญ่สุดของ I ดังนั้นเราต้องได้ว่า I ไม่เป็นสับเซตแท้ของบางเซต นั่นคือ $I = Y$ หรือ $I = Z$ ทำให้ Y, Z ต้องมีเซตใดเซตหนึ่งเป็นชิ้นส่วนของอีกเซต

เพราะฉะนั้นเราจะได้ว่าคอลเลคชั่นของเซต f-inductive นั้นเรียงอันดับทุกส่วนภายใต้การเป็นสับเซต แล้วเราจะได้ว่ายูเนียน U ของเซตดังกล่าวจะเป็นเซต f-inductive ที่ใหญ่ที่สุดใน A (ดูบทตั้งด้านล่าง) ฉะนั้นจะมีขอบเขตบนโดยแท้ $f(U)$ ของ U พิจารณา $U \cup \{f(U)\}$ จะเป็นเซต f-inductive ที่ใหญ่กว่า U ขัดแย้งกับความใหญ่สุดของมัน $\square$

บทตั้ง 4.5. ให้ P_α เป็นคอลเลคชั่นของสับเซตของ S ที่เรียงอันดับดีด้วย $\leq_\alpha$ โดยมีเงื่อนไขว่าสำหรับ α, β แล้วเซต $(P_\alpha, \leq_\alpha)$ และ $(P_\beta, \leq_\beta)$ จะต้องมีเซตใดเซตหนึ่งที่เป็นชิ้นส่วนต้นของอีกเซต

ให้ P เป็นยูเนียน $\bigcup_\alpha P_\alpha$ และนิยามการเรียงลำดับ $x \leq y$ ก็ต่อเมื่อ $x \leq_\alpha y$ ในบางเซต P_α ที่บรรจุสมาชิกทั้งสอง แล้ว P เป็นเซตจัดอันดับดีภายใต้ $\leq$ โดยที่แต่ละ P_α เป็นชิ้นส่วนต้นของ P

พิสูจน์. สังเกตว่า $\leq$ นิยามดีและเป็นอันดับทุกส่วนบน P เพราะถ้าให้ $x, y \in P$ แล้วจะได้ว่า $x \in P_\alpha$ และ $y \in P_\beta$ สำหรับบาง α, β โดยที่ P_α, P_β ต้องมีเซตใดเซตหนึ่งบรรจุอีกเซต โดยไม่เสียนัยทั่วไปให้ $P_\alpha \subseteq P_\beta$ แล้วจะได้ว่า x, y เปรียบเทียบกันได้ใน P_β

ถ้า $T \subseteq P$ เป็นเซตไม่ว่าง แล้ว $T \cap P_\alpha$ เป็นเซตไม่ว่างสำหรับบาง α ดังนั้นจะมีสมาชิกน้อยสุด $t \in T \cap P_\alpha$ ภายใต้ $\leq_\alpha$ เราอ้างว่า t นี้จะเป็นสมาชิกน้อยสุดภายใต้ $\leq$ ด้วย

ให้ $s \in T$ โดยที่ $s \leq t$ แล้วจะได้ว่า $s \in P_\alpha$ ด้วยจากการที่ P_α เป็นชิ้นส่วนต้นของ P ดังนั้นจะได้ $t \leq s$ จากนิยามของ t $\square$

บทพิสูจน์ข้อความที่ว่า (ZL) $\Leftarrow$ (AC) อีกรูปแบบหนึ่งที่ปรากฏทั่วไปในหนังสือต่าง ๆ จะอ้างทฤษฎีบท Bourbaki–Witt เป็นวิธีการระหว่างกลาง ผู้สนใจสามารถติดตามอ่านได้ใน [Lan02]

5 ความสมมูลระหว่าง WOP และ AC

สัจพจน์ 7 (Well-ordering principle (WOP))**.** หลักการจัดอันดับดี: ทุกเซตสามารถจัดอันดับดีได้

เราดำเนินการตามโปรแกรมที่เราวางไว้ด้วยการพิสูจน์ว่า (AC) $\Rightarrow$ (WOP) บทพิสูจน์ด้านล่างนี้(โดยเนื้อแท้แล้ว)เป็นบทพิสูจน์ที่ Zermelo ใช้พิสูจน์หลักการจัดอันดับดีในปี 1908 โดยไม่ใช้แนวคิดเกี่ยวกับ ordinals ที่ยังไม่มีนิยามในสมัยของเขา และปรากฏเป็นแบบฝึกหัดใน [Joh96]

ทฤษฎีบท 5.1 (ทฤษฎีบทของแซร์เมโล, 1908)**.** (AC) $\Rightarrow$ (WOP)

พิสูจน์. ให้ A เป็นเซต ถ้า A เป็นเซตว่างย่อมได้ว่า A จัดอันดับดี ดังนั้นเราพิจารณา $A \neq \varnothing$ ดังนั้นจะมีฟังก์ชันการเลือก $g\colon \mathcal{P}^*(A) \to A$ เราจะเรียกสับเซต C ของ $\mathcal{P}(A)$ ว่าเป็น*เซตปิด*[1] ก็เมื่อ

1. ถ้า $B \in C$ และ $B \neq A$ แล้วจะได้ว่า $B \cup \{g(A \setminus B)\}$ เป็นสมาชิกของ C และ

2. ยูเนียนของคอลเลคชั่นใด ๆ ของสมาชิกใน C ก็เป็นสมาชิกของ C ด้วย (ซึ่งจะทำให้ได้ว่า $\varnothing \in C$ ด้วย)

สังเกตว่า $\mathcal{P}(A)$ เป็นเซตปิด ดังนั้นคอลเลคชั่น $\mathfrak{C}$ ของเซตปิดทั้งหมดไม่เป็นเซตว่าง พิจารณา $\bigcap \mathfrak{C}$ เราจะพิสูจน์ว่าเซตนี้เป็นเซตปิดที่เล็กที่สุดด้วย

1. ให้ $B \in \bigcap \mathfrak{C}$ และ $B \neq A$ ดังนั้น $B \in C$ สำหรับทุกเซตปิด C เพราะฉะนั้น $B \cup \{g(A \setminus B)\}$ จะอยู่ใน C สำหรับทุกเซตปิด C ด้วย นั่นคือ $B \cup \{g(A \setminus B)\} \in \bigcap \mathfrak{C}$

2. สังเกตว่า $\varnothing \in \bigcap \mathfrak{C}$

   ให้ $\{B_\beta\}$ เป็นคอลเลคชั่นของสมาชิกใน $\mathfrak{C}$ ดังนั้น $\{B_\beta\}$ เป็นคอลเลคชั่นของสมาชิกในเซตปิด C ใด ๆ เพราะฉะนั้น $\bigcup\{B_\beta\}$ เป็นสมาชิกในทุกเซตปิด C ด้วย และจะได้ว่า $\bigcup\{B_\beta\}$ เป็นสมาชิกของ $\bigcap \mathfrak{C}$ ด้วย

3. ให้ C เป็นเซตปิด เห็นได้ชัดจากนิยามว่า $\bigcap \mathfrak{C} \subseteq C$

เราจะเรียก $B \in \bigcap \mathfrak{C}$ ว่าเป็น *pinch point* ถ้า B สามารถเปรียบเทียบได้กับสมาชิกทุกตัวใน $\mathfrak{C}$ ภายใต้การเป็นสับเซต (นั่นคือสำหรับทุก $Y \in \bigcap \mathfrak{C}$ จะได้ว่า $B \subseteq Y$ หรือ $Y \subseteq B$) และให้ $\mathcal{B}$ เป็นเซตของ pinch point ทั้งหมดใน $\mathfrak{C}$ พบว่า

1. ให้ $B \in \mathcal{B}$ และ $B \neq A$ แล้วจะได้ว่า $B \cup \{g(A \setminus B)\} \in \bigcap \mathfrak{C}$ เราจะแสดงว่าเซต $B' \coloneqq B \cup \{g(A \setminus B)\}$ เป็น pinch point ด้วย

   ให้ $\mathfrak{B}'$ แทนเซตใน $\bigcap \mathfrak{C}$ ที่เปรียบเทียบได้กับ B' ทั้งหมด (นั่นคือ ถ้า $Y \in \mathfrak{B}'$ แล้วจะได้ว่า $Y \subseteq B'$ หรือ $B' \subseteq Y$) เราจะพิสูจน์ว่าเซตดังกล่าวเป็นเซตปิด

   (a) ให้ $Y \in \mathfrak{B}$ ถ้า $Y = A$ แล้วจะได้ว่า $B' \subseteq A$ โดยทันที จึงสมมติให้ $Y \neq A$ ฉะนั้นจะสามารถสร้าง $Y' \coloneqq Y \cup \{g(A \setminus Y)\}$ ได้

   เราจะแสดงว่า $B' \subseteq Y'$ หรือ $Y' \subseteq B'$ แต่เราทราบว่า Y ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

   $$\begin{aligned} &B \subseteq Y' \quad \text{หรือ} \quad Y' \subseteq B \quad (\text{เนื่องจาก } B \text{ เป็น pinch point}) \text{ และ} \\ &B' \subseteq Y \quad \text{หรือ} \quad Y \subseteq B' \quad (\text{เนื่องจาก } Y \in \mathfrak{B}) \end{aligned}$$

   สังเกตว่า $B \subsetneq B'$ และ $Y \subsetneq Y'$ เสมอ ถ้า $Y' \subseteq B$ หรือ $B' \subseteq Y$ แล้วจะได้ทันทีว่า $Y' \subseteq B'$ หรือ $B' \subseteq Y'$ ฉะนั้น Y' และ B' เปรียบเทียบกันได้ จึงเหลือกรณีเมื่อ $B \subseteq Y'$ และ $Y \subseteq B'$ พร้อมกัน

[1] ไม่ใช่เซตปิดในความหมายของทอพอโลยี แต่ใกล้เคียงกัน

จาก B เป็น pinch point เราจะได้ว่า $B \subseteq Y$ หรือ $Y \subseteq B$ ในกรณีแรกเราย่อมได้ว่า $B \subseteq Y \subseteq B' = B \cup \{g(A \setminus B)\}$ ซึ่งทำให้ได้ว่า $B = Y$ หรือ $Y = B'$

ในกรณีที่สอง เราได้ว่า $Y \subseteq B \subseteq Y' = Y \cup \{g(A \setminus Y)\}$ ฉะนั้น $Y = B$ หรือ $B = Y'$

ไม่ว่าในกรณีไหนจะได้ว่า Y' เปรียบเทียบกันได้กับ B' ทั้งสิ้น ดังนั้น $Y' \in \mathfrak{B}'$

(b) สังเกตว่า $\varnothing \in \mathfrak{B}'$

ให้ $\{B_\beta\}_{\beta \in I}$ เป็นคอลเลคชั่นของเซตใน $\mathfrak{B}'$ ดังนั้นสำหรับทุก $\beta \in I$ จะได้ว่า $B_\beta \subseteq B'$ หรือ $B' \subseteq B_\beta$ ฉะนั้นจะมีกรณีเกิดขึ้นได้คือ

i. ถ้ามีดรรชนี β' ที่ทำให้ $B' \subseteq B_{\beta'}$ แล้วจะได้ว่า $B' \subseteq B_{\beta'} \subseteq \bigcup\{B_\beta\}$

ii. ถ้าสำหรับทุก β' เราได้ว่า $B_{\beta'} \subseteq B'$ แล้วจะได้ว่า $\bigcup\{B_{\beta'}\} \subseteq B'$

ดังนั้น $\bigcup\{B_\beta\}$ เปรียบเทียบได้กับ B' นั่นคือ $\bigcup\{B_\beta\} \in \mathfrak{B}'$

จากทั้งสองกรณี สรุปได้ว่า $\mathfrak{B}'$ เป็นเซตปิด แต่จาก $\mathfrak{B}' \subseteq \bigcap \mathfrak{C}$ และ $\bigcap \mathfrak{C}$ เป็นเซตปิดที่เล็กที่สุด แล้วจะได้ว่า $\mathfrak{B}' = \bigcap \mathfrak{C}$ นั่นคือ ทุกสมาชิกใน $\bigcap \mathfrak{C}$ เปรียบเทียบได้กับ B' ฉะนั้น B' เป็น pinch point ด้วย และ $B' \in \mathcal{B}$

2. สังเกตว่า $\varnothing \in \mathcal{B}$

ให้ $\{B_\beta\}_{\beta \in I}$ เป็นคอลเลคชั่นของ pinch point ดังนั้นสำหรับทุก $Y \in \bigcap \mathfrak{C}$ และ $\beta \in I$ จะได้ว่า $B_\beta \subseteq Y$ หรือ $Y \subseteq B_\beta$ ฉะนั้นจะมีกรณีเกิดขึ้นได้คือ

(a) ถ้ามีดรรชนี β' ที่ทำให้ $Y \subseteq B_{\beta'}$ แล้วจะได้ว่า $Y \subseteq B_{\beta'} \subseteq \bigcup\{B_\beta\}$

(b) ถ้าสำหรับทุก β' เราได้ว่า $B_{\beta'} \subseteq Y$ แล้วจะได้ว่า $\bigcup\{B_{\beta'}\} \subseteq Y$

ดังนั้น $\bigcup\{B_\beta\}$ เปรียบเทียบได้กับทุก $Y \in \bigcap \mathfrak{C}$ นั่นคือ $\bigcup\{B_\beta\}$ เป็น pinch point และ $\bigcup\{B_\beta\} \in \mathcal{B}$

จากทั้งสองของข้างต้นจะได้ว่า $\mathcal{B}$ เป็นเซตปิด แต่จาก $\mathcal{B} \subseteq \bigcap \mathfrak{C}$ และ $\bigcap \mathfrak{C}$ เป็นเซตปิดที่เล็กที่สุด แล้วจะได้ว่า $\mathcal{B} = \bigcap \mathfrak{C}$ ดังนั้นทุกสมาชิกใน $\bigcap \mathfrak{C}$ เป็น pinch point และสามารถเรียงลำดับได้ทุกส่วนด้วยการเป็นสับเซต

ต่อไปเราจะเรียงอันดับดีให้กับเซต A ให้ $x \in A$ เป็นสมาชิกใด ๆ พิจารณาเซต

$$B_x = \bigcup\{B \in \bigcap \mathfrak{C} \colon x \notin B\}$$

นั่นคือ B_x เป็นยูเนียนของสมาชิกทั้งหมดใน $\bigcap \mathfrak{C}$ ที่ไม่มี x เป็นสมาชิก สังเกตว่า $B_x \in \bigcap \mathfrak{C}$ เพราะ $\bigcap \mathfrak{C}$ เป็นเซตปิด ฉะนั้น B_x เป็นเซตที่ใหญ่ที่สุดที่มีสมบัติว่า $x \notin B_x$

เนื่องจาก $x \in A$ และ $x \notin B_x$ ดังนั้น $A \neq B_x$ ฉะนั้นเราสามารถสร้างเซต $B'_x = B \cup g(A \setminus B_x)$ ได้ และ $B_x \subsetneq B'_x$ ถ้า $x \neq g(A \setminus B_x)$ แล้วจะได้ว่า B'_x เป็นเซตที่ใหญ่กว่า B_x โดยแท้ และไม่มี x เป็นสมาชิก ขัดแย้งกับการสร้าง B_x ของเรา ดังนั้นจะต้องได้ว่า $x = g(A \setminus B_x)$ เท่านั้น

นิยามการเรียงลำดับ $<$ ให้เซต A ดังนี้

$$(x < y) \Leftrightarrow \text{มี } B \in \bigcap \mathfrak{C} \text{ ที่ทำให้ } x \in B \text{ และ } y \notin B$$

จะได้ว่า $<$ มีสมบัติต่อไปนี้

- (Irreflexive) เห็นได้ชัดว่า $x \not< x$ สำหรับทุก x

- (Antisymmetric) สมมติให้ $x < y$ แล้วจะได้ว่ามี $B \in \bigcap \mathfrak{C}$ ที่ทำให้ $x \in B$ และ $y \notin B$ ดังนั้น $x \in B \subseteq B_y$ และ $y \notin B_y$

  ให้ C เป็นเซตใน $\bigcap \mathfrak{C}$ ใด ๆ ที่ $y \in C$ จากการที่ $\bigcap \mathfrak{C}$ เรียงลำดับทุกส่วนด้วยการเป็นสับเซต ดังนั้น $C \subseteq B_y$ หรือ $B_y \subseteq C$ เท่านั้น แต่จาก $y \notin B_y$ ดังนั้น $B_y \subseteq C$ ได้อย่างเดียว และจะได้ว่า $x \in C$ ด้วย ฉะนั้น $y < x$ ไม่จริง จึงส่งผลให้ $<$ มีสมบัติปฏิสมมาตร

- (Transitive) ให้ $x < y$ และ $y < z$ ดังนั้นมีเซต $B, C \in \bigcap \mathfrak{C}$ ที่ทำให้ $x \in B, y \notin B$ และ $y \in C, z \notin C$

  เนื่องจาก $y < z$ และ $<$ มีสมบัติปฏิสมมาตร ดังนั้น $z < y$ ไม่จริง นั่นคือทุกเซต $V \in \bigcap \mathfrak{C}$ จะได้ว่า $z \notin V$ หรือ $y \in V$ เมื่อพิจารณากับเซต B จากข้างต้นเราทราบว่า $y \notin B$ ดังนั้น $z \notin B$ ด้วย

  ฉะนั้น $B \cup C$ เป็นเซตใน $\bigcap \mathfrak{C}$ ที่ซึ่ง $x \in (B \cup C)$ และ $z \notin (B \cup C)$ นั่นคือ $x < z$ ตามต้องการ

- (Connected) ให้ $x, y \in A$ โดยที่ $x \neq y$ และ $\neg(x < y)$ ดังนั้นทุกเซต $B \in \bigcap \mathfrak{C}$ จะได้ว่า $x \notin B$ หรือ $y \in B$

  จากข้างต้น จะมีเซต $B_y \in \bigcap \mathfrak{C}$ ที่ซึ่ง $y \notin B_y$ บังคับให้ $x \notin B_y$ ด้วย พิจารณา

  $$B'_y = B_y \cup \{g(A \setminus B_y)\} = B_y \cup \{y\}$$

  (สร้างเซตดังกล่าวได้ เพราะ $B_y \neq A$) เนื่องจาก $x \notin B_y$ และจาก $x \neq y$ เราจะได้ว่า $x \notin B'_y$ ด้วย ดังนั้น B'_y เป็นเซตที่มี y เป็นสมาชิก แต่ x ไม่เป็นสมาชิก เพราะฉะนั้น $y < x$ ตามต้องการ

- (Well-orderedness) ให้ $X = \{x_i\}_{i \in I} \subseteq A$ เป็นเซตไม่ว่าง เราจะแสดงว่ามีสมาชิก x ใน X ที่เป็นสมาชิกเล็กที่สุด (นั่นคือ ถ้า $y \neq x$ แล้ว $y > x$) พิจารณา

  $$B_X = \bigcup \Big\{ B \in \bigcap \mathfrak{C} \colon X \cap B = \varnothing \Big\}$$

  จะได้ว่า B_X เป็นเซตที่ใหญ่ที่สุดใน $\bigcap \mathfrak{C}$ ที่มีสมบัติว่า $X \cap B_X = \varnothing$ ด้วย และทำให้ $A \neq B_X$ (เพราะ $X \cap A \neq \varnothing$ แต่ $X \cap B_X = \varnothing$) ดังนั้นจะมีเซต

  $$B'_X = B_X \cup \{g(A \setminus B_X)\} \in \bigcap \mathfrak{C}$$

  เราอ้างว่า $g(A \setminus B_X) \in X$ มิฉะนั้น $B'_X \supsetneq B_X$ จะเป็นเซตใน $\bigcap \mathfrak{C}$ ที่ใหญ่กว่า B_X ที่ $B'_X \cap X = \varnothing$ ขัดแย้งกับการสร้าง X ของเรา ดังนั้น $g(A \setminus B_X) \in X$

  กำหนด $x \coloneqq g(A \setminus B_X)$ ให้ $y \in X$ เป็นสมาชิกใด ๆ ที่ $y \neq x$ ดังนั้นมีเซต B'_X ที่ซึ่ง $x \in B'_X$ แต่ $y \notin B'_X$ นั่นคือ $x < y$ และจะได้ว่า x เป็นสมาชิกเล็กที่สุดใน X

จากทุกข้อข้างต้น จะได้ว่า $<$ เป็นการจัดอันดับดีบน A □

ขากลับของทฤษฎีบทข้างต้นนั้นง่ายมาก

ทฤษฎีบท 5.2. (WOP) $\Rightarrow$ (AC)

พิสูจน์. ให้ $\{A_i\}_{i \in I}$ เป็นวงศ์ของเซตไม่ว่าง ให้ $X = \bigcup_{i \in I} A_i$ และให้ $\leq$ เป็นการเรียงอันดับดีบน X นิยามฟังก์ชัน $f \colon I \to X$ โดยที่ $f(i)$ ให้เป็นสมาชิกที่น้อยที่สุดของ A_i แล้วจะได้โดยง่ายว่า f เป็นฟังก์ชันการเลือก □

ทฤษฎีบท 5.3. (ZL) $\Rightarrow$ (WOP)

พิสูจน์. ให้ A เป็นเซต ถ้า A เป็นเซตว่างเห็นได้ชัดว่า A เรียงลำดับดี ดังนั้นสมมติให้ A ไม่เป็นเซตว่าง

ให้ $\mathcal{A}$ เป็นเซตของอันดับดีทั้งหมดบนสับเซตของ A ดังนี้

$$\mathcal{A} = \left\{(X, \leq_X) \in \mathcal{P}(A) \times A^2 \colon X \subseteq A \text{ และ } \leq_X \text{ เป็นการจัดอันดับดีบน } X\right\}$$

เห็นได้ว่า $\mathcal{A}$ ไม่เป็นเซตว่าง เพราะเซตที่มีสมาชิก 1 ตัวสามารถจัดอันดับดีได้ และอันดับดังกล่าวจะเป็นสมาชิกของ $\mathcal{A}$ ด้วย

เพื่อใช้ Zorn's lemma เราเรียงลำดับ $\mathcal{A}$ ด้วยการเรียงลำดับร่วมกัน นั่นคือนิยาม $(E, \leq_E) \leq (F, \leq_F)$ ก็ต่อเมื่อ E เป็นชิ้นส่วนต้นของ F (นั่นคือถ้า $x, y \in F$ โดยที่ $x \leq y$ และ $y \in E$ แล้ว $x \in E$ ด้วย) และการเรียงลำดับใน E เหมือนกับการเรียงลำดับใน F

ให้ $C = \{(E_i, \leq_{E_i})\}_{i\in I}$ เป็นลูกโซ่ใน $\mathcal{A}$ เราสามารถสร้างการเรียงลำดับ

$$\bigcup C = \left(\bigcup E_i, \bigcup \leq_{E_i}\right)$$

จากบทตั้ง 4.5 จะได้ว่า $\bigcup C$ เป็นการเรียงลำดับดีด้วย จะเห็นได้ชัดว่า $\bigcup C$ เป็นขอบเขตบนของโซ่ C ดังนั้นทุกโซ่มีขอบเขตบน โดย Zorn's lemma จะได้ว่า $\mathcal{A}$ มีสมาชิกมากที่สุด ให้เป็น $(M, \leq_M)$

เราอ้างว่า $M = A$ มิฉะนั้นจะมีสมาชิก $x \notin M$ และเราสามารถนิยาม $(M \cup \{x\}, \leq_{M\cup\{x\}})$ ได้ด้วยใช้อันดับเดิมสำหรับสมาชิกใน M และให้ $m \leq x$ สำหรับทุก $m \in M$ จะเห็นได้ว่า $(M\cup\{x\}, \leq_{M\cup\{x\}})$ เป็นการเรียงลำดับดีบน $M\cup\{x\}$ และ $(M, \leq_M) < (M\cup\{x\}, \leq_{M\cup\{x\}})$ ขัดแย้งกับความใหญ่ที่สุดของ $(M, \leq_M)$ ดังนั้น $M = A$ เท่านั้น นั่นคือ $(M, \leq_M) = (A, \leq_A)$ เป็นการเรียงลำดับดีบน A □

บทแทรก 5.4. (AC) $\Leftrightarrow$ (ZL) $\Leftrightarrow$ (WOP)

พิสูจน์.

- (AC) $\Leftrightarrow$ (ZL) พิสูจน์ในทฤษฎีบท 4.4 และทฤษฎีบท 4.3
- (ZL) $\Rightarrow$ (WOP) พิสูจน์ในทฤษฎีบท 5.3
- (WOP) $\Leftrightarrow$ (AC) พิสูจน์ในทฤษฎีบท 5.1 และทฤษฎีบท 5.2 □

ยังมีวิธีการพิสูจน์แบบอื่น ๆ ที่ใช้ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับ ordinals ซึ่งทำให้บทพิสูจน์สั้นลงอย่างมาก ผู้ที่สนใจสามารถติดตามอ่านได้ใน [Cie97] หรือ [Pot04] ประวัติความเป็นมาและข้อถกเถียงเกี่ยวสัจพจน์การเลือกในประวัติศาสตร์ของคณิตศาสตร์สามารถหาอ่านได้ใน [Bel21]

6 บรรณานุกรม

[Bel21] John L. Bell, *The Axiom of Choice*, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Edward N. Zalta, ed.), Metaphysics Research Lab, Stanford University, Winter 2021 ed., 2021.

[Cie97] Krzysztof Ciesielski, *Set theory for the working mathematician*, London Mathematical Society Student Texts, no. 39, Cambridge University Press, 1997.

[Fre87] Peter Freyd, *Choice and well-ordering*, Annals of Pure and Applied Logic **35** (1987), 149–166.

[Gar13] D. J. H. Garling, *A course in mathematical analysis*, vol. I, Cambridge University Press, 2013.

[HL19] Martin Hils and François Loeser, *A first journey through logic*, Student Mathematical Library, no. 89, American Mathematical Society, 2019.

[Joh96] P. T. Johnstone, *Notes on logic and set theory*, Cambridge Mathematical Textbooks, Cambridge University Press, 1996.

[Lan02] Serge Lang, *Algebra*, revised third ed., Graduate Texts in Mathematics, no. 211, Springer-Verlag, 2002.

[nLa22] nLab authors, *Zorn's lemma*, `https://ncatlab.org/nlab/show/Zorn's+lemma`, April 2022.

[Pot04] Michael Potter, *Set theory and its philosophy: A critical introduction*, Oxford University Press, 2004.

[vH67] J. van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel, A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1967.

[Zer08] Ernst Zermelo, *Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung*, Mathematische Annalen **65** (1908), 107–128 (German).

[Zer67] ———, *A new proof of the possiblity of a well-ordering*, in van Heijenoort [vH67], pp. 183–198.